

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
RAČUNALNIŠKA FIZIKA

Miha Rot

**MODALNA DEKOMPOZICIJA NARAVNE
KONVEKCIJE V NENEWTONSKIH
TEKOČINAH**

Magistrsko delo

MENTOR: doc. dr. Martin Horvat
SOMENTOR: dr. Gregor Kosec

Ljubljana, 2020

Zahvala

Zahvaljujem se mentorjema za pomoč in nasvete pri pisanju magistrskega dela. Zahvaljujem se tudi sodelavcem iz Laboratorija za vzporedno in porazdeljeno računanje Instituta Jožef Stefan za pomoč in nasvete pri pregledu besedila.

MODALNA DEKOMPOZICIJA NARAVNE KONVEKCIJE V NENEWTONSKIH TEKOČINAH

IZVLEČEK

V magistrskem delu predstavimo dinamično modalno dekompozicijo tokovnih struktur, ki nastanejo pri naravni konvekciji nenewtonskih tekočin v zaprti kotanji. Fizikalni model vsebuje ohranitev mase, prenos toplote in gibalne količine, Ostwald-de Waele potenčni model za opis nenewtonske viskoznosti in Boussinesqov približek temperaturne odvisnosti gostote. Fizikalni model rešimo numerično s posplošeno metodo končnih diferenc, eksplicitnim Eulerjevim korakanjem in Chorinovo projekcijsko metodo. Implementiran rešitveni postopek preverimo preko primerjave z objavljenimi rezultati za več različnih primerov. Pokažemo dobro ujemanje z referenčnimi rešitvami in konvergentno obnašanje metode. V nadaljevanju vpeljemo dinamično modalno dekompozicijo, metodo za določanje glavnih elementov dinamike sistema, in jo demonstriramo na sintetičnem primeru. V glavnem delu metodo uporabimo za analizo načinov dinamike naravne konvekcije newtonske tekočine v zaprti kotanji. Analiziramo več različnih nenewtonskih tekočin v dveh različnih geometrijah in pokažemo spremembo glavnih elementov dinamike pri prehodu med stacionarnimi in nihajočimi rešitvami. Identificiramo elemente, ki pri newtonskih tekočinah niso prisotni in pokažemo, da je dinamika za psevdoplastične nenewtonske tekočine bogatejša.

Ključne besede:

Modalna dekompozicija, nenewtonske tekočine, prenos toplote, naravna konvekcija, Navier-Stokes, Ostwald-de Waele potenčni model

MODAL DECOMPOSITION OF NATURAL CONVECTION IN NON-NEWTONIAN FLUIDS

ABSTRACT

In this work, we present the dynamic mode decomposition of natural convection in a non-Newtonian fluid within a closed cavity. The physical model considers mass and momentum transport, Ostwald-de Waele power-law for a description of non-Newtonian viscosity, and Boussinesq approximation for description of density temperature dependency. The model is numerically solved with generalised finite differences, explicit Euler stepping and Chorin's projection method. The implemented solution procedure is tested by comparison of computed results with published data with good agreement achieved. We introduce dynamic mode decomposition and demonstrate its performance on a synthetic case. The main part of this work is focused on a mode analysis of natural convection of non-Newtonian fluid in a closed cavity. We analyse different non-Newtonian fluids in two different geometries where we are in particular interested in the transition from stationary to oscillatory solutions. In addition, we identify elements of dynamics that are not present in Newtonian fluids and show that the pseudoplastic non-Newtonian fluids exhibit richer dynamics in comparison with Newtonian fluids.

Keywords: Dynamic modal decomposition, non-Newtonian fluids, heat transport, natural convection, Navier-Stokes, Ostwald-de Waele model, power-law fluid

Kazalo

Seznam slik	11
1 Uvod	13
2 Fizikalni model	17
2.1 Enačbe hidrodinamike	17
2.1.1 Lagrangeev in Eulerjev opis gibanja	17
2.1.2 Ohranitev mase	17
2.1.3 Ohranitev energije	18
2.1.4 Ohranitev gibalne količine	18
2.1.5 Nenevtonske tekočine	20
2.1.6 Boussinesqov približek	21
2.2 Model naravne konvekcije v zaprti kotanji	21
2.3 Numerični rešitveni postopek	22
2.4 Numerični primeri	25
3 Modalna dekompozicija	27
3.1 Algoritem	27
3.2 Propagacija in pomen lastnih vrednosti	29
3.3 Razvrščanje načinov	30
3.4 Demonstracija na sintetičnem primeru	31
4 Rezultati	35
4.1 Kvadratna kotanja	35
4.2 Pravokotna kotanja	41
5 Zaključek	45
Literatura	47
Dodatek A Povezava lastnih vrednosti/vektorjev Koopmanovega operatorja in DMD	51
Dodatek B Ujemanje lastnih vrednosti in vektorjev linearne preslikave A z rezultati DMD dekompozicije	53
6 Frekvence in moči lastnih načinov za primer pokončne pravokotne kotanje	55

Seznam slik

2.1	Napetostni tenzor	19
2.2	Viskoznost	20
2.3	Skica numeričnega primera.	22
2.4	Rešitev kvadratne kotanje	25
2.5	Rešitev pokončne pravokotne kotanje	26
2.6	Konvergenca povprečne vrednosti Nusseltovega	26
3.1	Skica sintetičnega primera	32
3.2	Ortogonalna dekompozicija sintetičnega primera	33
3.3	Lastne vrednosti sintetičnega primera	34
3.4	Lastni vektorji sintetičnega primera	34
4.1	Potek Nusseltovega števila	36
4.2	DMD spekter kvadratne kotanje	37
4.3	Vpliv parametrov na glavne nihajne načine kvadratne kotanje	38
4.4	Vpliv Ra na lastne vektorje DMD za kvadratno kotanjo	39
4.5	Vpliv n na lastne vektorje DMD za kvadratno kotanjo	40
4.6	Vpliv Ra na lastne vektorje DMD za pokončno pravokotno kotanjo	42
4.7	Vpliv n na lastne vektorje DMD za pokončno pravokotno kotanjo	43
6.1	Vpliv parametrov na glavne nihajne načine pokončne pravokotne kotanje	55
6.2	DMD frekvence pokončne pravokotne kotanje	56



Poglavje 1

Uvod

Naravna konvekcija je proces, ki nas spremlja na vsakem koraku. Najbolj nazorno jo opazimo pri vremenu, ko recimo opazujemo, kako se hladen zrak zliva v dolino, ali ko pred nevihto segret zrak silovito prodira v višje plasti ozračja [1]. Po drugi strani je naravna konvekcija pomemben proces v mnogih industrijskih panogah, saj je pogosto glavni mehanizem prenosa toplote, zlasti v zaprtih območjih. Primer takega procesa je ulivanje kovinskih izdelkov, kjer med strjevanjem zlitine zaradi visokih temperaturnih gradientov izrazita naravna konvekcija povzroča neenakomerno porazdelitev zmesi in posledično nepravilnosti v končnem izdelku [2]. Zaradi njene vseprisotnosti je študij naravne konvekcije priljubljena raziskovalna tema. Raziskovalci so opravili že vrsto teoretičnih [3], eksperimentalnih [4] in numeričnih študij [5], da bi poglobili razumevanje tega pojava. Pri tem je bila v ospredju pogosto obravnava mehanike *newtonskih tekočin*, s predpostavko, da je viskoznost tekočine neodvisna od strižnih sil.

Slabost newtonskega modela je, da ne opiše mnogih zanimivih tekočin, kot so kri, polimeri, barve, tekoča hrana, organske zmesi in še vrsto drugih kompleksnih zmesi. *Reologijo*, vedo ki se ukvarja s tovrstnimi materiali, je vpeljal profesor Bingham na začetku prejšnjega stoletja [6]. Obravnava *nenevtonskih tekočin* je v splošnem težja, saj povezava med napetostnim in deformacijskim tenzorjem ni več linearna, temveč je v splošnem odvisna od strižnih sil [7]. Viskoznost nenevtonskih tekočin se lahko, glede na velikost strižnih sil, večja ali manjša [7]. Prav tako je lahko viskoznost nenevtonske tekočine časovno odvisna [8].

V grobem nenevtonske tekočine delimo na *psevdoelastične* in *dilatantne* [9]. Psevdoelastičnim tekočinam se z večanjem strižne hitrosti viskoznost manjša. Primeri takih tekočin so človeška kri [10], polimeri [11], sadni sok [12] ali kečap. Poznamo različna mikroskopska pojasnila, zakaj to tega prihaja. Najbolj ilustrativno in preprosto pojasnilo se sklicuje na orientacijo molekul. Daljše polimerne molekule so v tekočini sprva naključno orientirane in nasprotujejo gibanju, zaradi strižnih sil pa se del molekul medsebojno poravnava. Takšna mikroskopska struktura tekočine se posledično manj upira gibanju. Upor še dodatno izzveni, ko se pri večjih strižnih hitrostih molekule uredijo.

Dilatantne tekočine, katerim viskoznost narašča s strižno hitrostjo, so bolj redke. Priljubljen primer take tekočine je Oobleck, tj. zmes škroba in vode. Oseba, lahko z zelo energičnimi koraki po taki tekočini hodi, medtem ko v njej potone, kadar miruje. Na mikroskopskem nivoju fenomen pojasnimo tako, da tekočina deluje kot lubrikant med delci v primeru majhnih strižnih hitrosti, v primeru visokih strižnih

hitrosti pa prevladuje interakcija trdnih delcev.

Poleg psevdoelastičnih in dilatantnih tekočin poznamo tudi *Binghamove plastične materiale*, ki se pri nizkih napetostih obnašajo kot trdne snovi in kot viskozne tekočine pri višjih napetostih [6]. Tak prehod, opisan z viskoznostjo, predstavimo kot prehod med neskončno viskoznostjo trdnine in končno viskoznostjo tekočine. Približek neskončne viskoznosti lahko za nenewtonske tekočine uporabimo le na kratki časovni skali, a tudi takrat se izkaže, da še vedno tečejo (čeprav so v območju trdnin), le da imajo zelo veliko viskoznost [13].

Ne glede na tip tekočine je razumevanje njenega gibanja ključnega pomena za analizo naravne konvekcije, kar se pogosto obravnava numerično. Simulacije mehanike tekočin so pravzaprav paradna disciplina s področja numerične analize [5] in visoko zmogljivega računalništva [14]. Leta 1983 je de Vahl Davis v svojem znamenitem članku [15] objavil referenčno rešitev naravne konvekcije zraka v zaprti kotanji z različno segretimimi vertikalnimi stenami in adiabatnimi horizontalnimi stenami. Mnogi avtorji so njegov izračun ponovili in s tem potrdili numerično rešitev [16, 17]. Sledila je poplava objav, kjer so avtorji analizirali naravno konvekcijo okoli različnih segretimih oblik, kot so valji [18], škatle [19] ali torusi [20], preučevali različne izboljšave numeričnih postopkov [21] in različne robne pogoje [22]. Ozo in Churchill [23] sta bila med prvimi, ki sta že leta 1972 numerično preučevala stabilnost naravne konvekcije nenewtonske tekočine v kotanji. Referenčno rešitev, primerljivo Davisoni [15], za newtonske tekočine je za nenewtonske tekočine s sodelavci leta 2003 predstavil Kim [24], kjer so obravnavali Ostwald–de Waelejev potenčni model. Kimovo študijo [24] je s sodelavci leta 2011 nagradil Turan [25], kjer so avtorji temeljito preiskali prostor rešitev za različne tipe tekočin pri različnih pogojih. Pri tem so se dotaknili tudi prehodov med načini prenosa toplote. Istega leta je Moraga s sodelavci pripravil primerjavo različnih nenewtonskih modelov (Ostwald–de Waele, Herschel-Bulkley, Bingham in Papanastasiou), kjer so poleg naravne konvekcije obravnavali tudi fazni prehod [26]. Poleg omenjenih je bilo v zadnjih letih objavljeno kar nekaj študij naravne konvekcije nenewtonskih tekočin, kjer avtorji preučujejo različne pojave, npr. prenos toplote med grelnim telesom in robom domene [27, 28], uporaba različnih numeričnih metod [29] in simulacija strjevanja zlitin [30].

V splošnem numerična simulacija naravne konvekcije nudi hitrostno ter temperaturno polje v vseh računskih točkah za vsak časovni korak simulacije, kar predstavlja ogromno količino podatkov. Analiza teh podatkov je lahko izredno težavna, posebej kadar imamo opravka z oscilatornim ali še huje turbulentim režimom. Pogosto nas ne zanimajo vse podrobnosti dinamike, temveč le njene najbolj pomembne komponente. Obstaja vrsta tehnik za dekompozicijo tokovnih struktur, kot so *iskanje globalnih lastnih nihajnih načinov* [31], *ortogonalna dekompozicija* [32] in *uravnovešena ortogonalna dekompozicija* [33]. *Dinamična modalna dekompozicija* je relativno nova tehnika, ki jo je vpeljal Schmid leta 2010 [34] namensko za obravnavo tokovne dinamike, ki iz časovne vrste podatkov izlušči nihajne načine s konstantno frekvenco. Z dinamično modalno analizo poleg krajevne klasifikacije načinov pridobimo tudi znanje o posameznih načinih. Metoda tako združuje lastnosti ortogonalne dekompozicije in Fourierove transformacije, kar jo uvršča med priljubljene metode za določanje nihajnih načinov dinamičnih sistemov.

V magistrskem delu se bomo posvetili aplikaciji dinamične modalne dekompozicije na dinamiki naravne konvekcije nenewtonske tekočine v zaprti kotanji. V prvem koraku bomo implementirali rešitveni postopek za simulacijo naravne konvekcije in

preverili izračune preko primerjave z objavljenimi rezultati. V naslednjem koraku bomo implementirali algoritem za dinamično modalno dekompozicijo ter preverili njegovo delovanje na sintetičnem primeru z znanim oscilatornim obnašanjem. V zadnjem delu bomo združili oba koraka in analizirali dinamiko v okolici znanih oscilatornih rešitev kvadratne in pravokotne kotanje, podanih v [35], za različne vrednosti parametrov.

Poglavje 2

Fizikalni model

Naravna konvekcija je pojav, kjer gibanje tekočine povzroči razlika v gostoti hladne in tople tekočine. Poglejmo si, kako pojav opišemo s fizikalnim modelom. Osnovni fizikalni model, ki opisuje naravno konvekcijo, vsebuje prenos toplote, prenos gibalne količine, ohranitev mase in upošteva temperaturno odvisnost gostote medija. V tem poglavju bomo na kratko opisali izvor osnovnih enačb hidrodinamike, jih sklopili z enačbo za prenos toplote in natančneje definirali, kaj so nenewtonske tekočine.

2.1 Enačbe hidrodinamike

2.1.1 Lagrangeev in Eulerjev opis gibanja

Poznamo različne pristope k opisu toka tekočin. V Lagrangeevem opisu obravnavamo posamezne delce¹ [36] tekočine in tok opišemo z njihovimi lastnostmi, medtem ko v Eulerjevem opisu tok predstavimo s polji lastnosti tekočine na danih mestih. Eulerjev pristop omogoča lažji opis tekočine in je primernejši za primerjavo z eksperimenti pri katerih merimo lastnosti toka na nepremičnih merilnih mestih. Za opis premikajoče se tekočine s hitrostjo \mathbf{v} uvedemo *substancialni odvod*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (2.1)$$

kjer leva stran predstavlja Lagrangeev in desna Eulerjev opis. Fizikalni pomen enačbe (2.1) razložimo z miselnim eksperimentom: Imejmo opazovalca, ki meri temperaturo tekočine v premikajočem se testnem volumnu. Sprememba temperature, ki jo izmeri, ni odvisna samo od časovne spremembe temperaturnega polja na trenutnem mestu ampak tudi od razlike med temperaturama na trenutnem in predhodnem mestu. S premikom med mestoma z različnima temperaturama bi opazovalec izmeril spremembo temperature četudi se samo polje v tem času ne bi spremenilo.

2.1.2 Ohranitev mase

Masa (m) delca tekočine se v Lagrangeevem opisu ohranja

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D(\rho V)}{Dt} = V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DV}{Dt} = 0, \quad (2.2)$$

¹Infinitezimalni volumni tekočine, za katere privzamemo, da so homogeni.

kjer smo z ρ označili gostoto tekočine in z V njen volumen. Relativni volumski raztezek povežemo z normalnimi komponentami deformacije [37, 38] in ga zapišemo kot $\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ ter dobimo kontinuitetno enačbo

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.3)$$

Enačbo (2.3) lahko dodatno interpretiramo preko integracije po testnem volumnu V . Prvi člen je tedaj integral gostote po končnem volumnu, kar nam opiše maso znotraj istega volumna, oziroma njen časovni odvod. Drugi člen z uporabo Gauss-Ostrogradsky-jevega izreka prevedemo na površinski integral in dobimo

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = 0, \quad (2.4)$$

kjer je \mathbf{S} rob volumna V . Zadnja enačba nam pove, da je sprememba mase znotraj testnega volumna V enaka razliki masnih tokov preko roba \mathbf{S} .

V nadaljevanju diskusije se bomo ukvarjali le s tokovi, kjer bodo hitrosti majhne v primerjavi s hitrostjo zvoka, kar nam omogoča, da tekočino obravnavamo v nestisljivem približku [39]

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (2.5)$$

iz česar sledi še

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

kar nam bo v nadaljevanju nekoliko olajšalo obravnavo.

2.1.3 Ohranitev energije

V opisu naravne konvekcije moramo upoštevati ohranitev energije. Poleg predpostavke o nestisljivosti, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, dodatno privzamemo konstantno specifično toploto c_p . Ponovno se sklicujemo na predpostavko o šibkih tokovih in zanemarimo delo viskoznih sil [38]. Temperatura se spreminja le zaradi neto spremembe toplote. Zapišemo ohranitev

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j} + q, \quad (2.7)$$

kjer so s q označeni notranji izvori toplote in z \mathbf{j} toplotni tok, ki ga opišemo s Fourierjevim zakonom

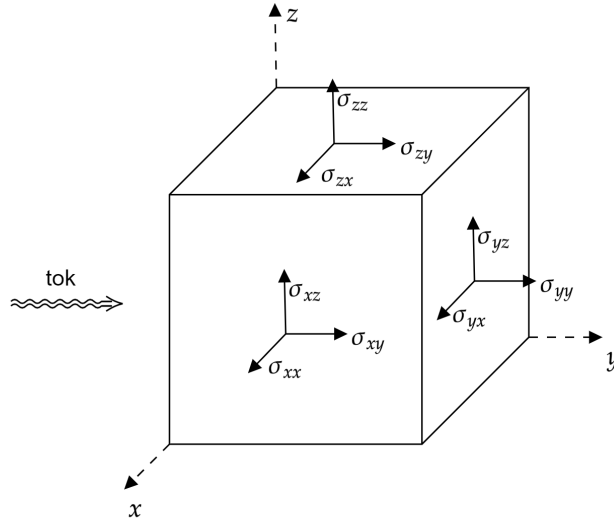
$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T, \quad (2.8)$$

kjer je λ toplotna prevodnost. Ohranitev energije končno zapišemo z enačbo

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q. \quad (2.9)$$

2.1.4 Ohranitev gibalne količine

Poleg ohranitve mase in energije je za opis naravne konvekcije pomembna še obravnavanje gibanja tekočine, kar opišemo preko ohranitve gibalne količine. Opis mehanike kontinuuma začnemo z vpeljavo *napetostnega* ali *tlačnega* tenzorja (σ), skiciranega na sliki 2.1. Tlačni tenzor je v mehaniko kontinuumov uvedel Cauchy in z njim opisal gostoto sil na navideznih stikih površin kontinuumov pri predpostavki, da je tlačna



Slika 2.1: Skica napetostnega tenzorja v kartezičnih koordinatah. Povzeto po [9].

obremenitev v poljubni točki kontinuuma popolnoma določena s simetričnim tenzorjem 2. reda [40]. Silo na posamezni del kontinuuma zapišemo preko napetostnega tenzorja kot

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.10)$$

Drugi Newtonov zakon, zapisan za kontinuum, opisuje Cauchyjeva enačba

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}^{(zun)}, \quad (2.11)$$

kjer smo z $\mathbf{f}^{(zun)}$ označili zunanje sile. Iz praktičnih razlogov napetostni tenzor pogosto razcepimo na dva dela

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (2.12)$$

Prvi člen predstavlja *tlačno obremenitev*, kjer smo s p označili tlak in drugi člen opisuje prispevek *strižnih* ali *viskozni* sil, kjer smo vpeljali strižni tenzor $\boldsymbol{\tau}$. Tak razcep je uporaben iz vsaj dveh razlogov. Prvi je, da nas pogosto zanima tlak, ki je z razcepom neposredno izražen, in drugi, da se obravnava različnih družin tekočin odraža v različni obravnavi strižnega tenzorja. Zapišimo Cauchyjevo enačbo z upoštevanjem (2.12)

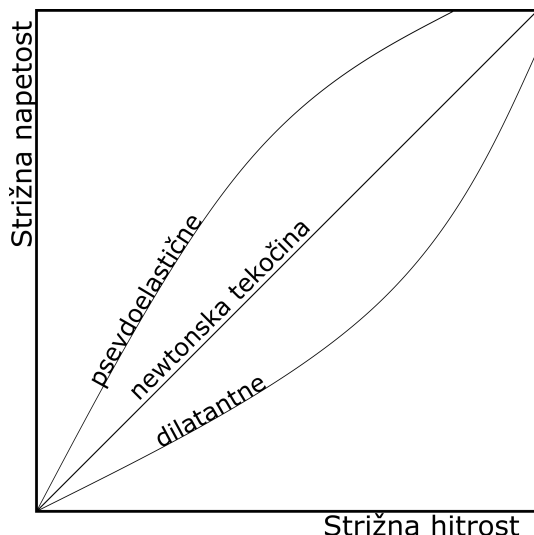
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}^{(zun)}. \quad (2.13)$$

Enačba je še vedno nepopolna, saj manjka povezava med strižnim tenzorjem in strižno hitrostjo. Iz eksperimentov je znano, da se napetosti v tekočini pojavijo ob strižnih gradientih hitrosti, ki jih opišemo preko časovnega odvoda deformacijskega tenzorja in imenujemo tenzor strižnih hitrosti [41]

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (2.14)$$

Zapišimo splošno relacijo med strižnim napetostnim tenzorjem in tenzorjem strižnih hitrosti

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (2.15)$$



Slika 2.2: Shematski prikaz različnih tipov zvez med viskozno in strižnim delom napetostnega tenzorja. Povzeto po [9].

kjer smo vpeljali novo količino *tenzor viskoznosti* η . V primeru izotropnih newtonskih tekočin se η poenostavi v konstanto. Enačbo (2.15) s konstantno viskoznostjo poznamo tudi pod imenom Newtonov zakon viskoznih tekočin. Zapišimo enačbo (2.13) za nestisljivo newtonsko tekočino [41]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}^{(zun)}, \quad (2.16)$$

kjer prepoznamo *Navier-Stokesovo* enačbo.

2.1.5 Nenewtonske tekočine

Nenewtonske tekočine so tiste tekočine, kjer viskozni člen tlačnega tenzorja ni več linearno odvisen od strižne hitrosti (slika 2.2).

Podobno kot v newtonskih tekočinah je osnova za opis gibanja tekočine Cauchyjeva enačba (2.11), le da je to pot viskoznost odvisna od hitrostnega gradienta

$$\eta \implies \eta(\dot{\gamma}). \quad (2.17)$$

Na voljo je več fizikalnih modelov viskoznosti tekočin. Nekateri so osnovani na mikroskopskih lastnostih materialov, medtem ko so drugi rezultati empiričnih dognanj. *Ostwald-de Waele potenčni model* je najpreprostejši model nenewtonskih tekočin, ki ga lahko uporabimo za psevdoelastične in za dilatantne tipe nenewtonskih tekočin. Model zapišemo kot

$$\eta = \eta_0 \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (2.18)$$

kjer sta n in η_0 parametra modela s katerima določimo njegovo obnašanje. Model s potenco $n = 1$ omeji model na opis newtonskih tekočin, vrednosti $n < 1$ opisujejo psevdoelastične tekočine in vrednosti $n > 1$ dilatantne tekočine. Potenčni model je dobra aproksimacija kadar imamo opravka z relativno majhnimi strižnimi hitrostmi. Takrat lahko rečemo, da sta η_0 in n konstantna.

Na voljo imamo tudi naprednejše modele, ki pokrijejo širši razpon strižnih hitrosti. *Carreau-Yasuda model* je neposredna razširitev Ostwald-de Waeleovega modela,

ki opiše asimptotsko obnašanje z vmesnim potenčnim modelom. *Herschel-Bulkley model* upošteva tudi prehod v plastično obnašanje, kar še boljše popiše *Papanastasiou model* [26].

2.1.6 Boussinesqov približek

Do polnega fizikalnega modela naravne konvekcije nam manjka samo še sklopitev prenosa toplote in gibalne količine. Sklopitev vpeljemo preko Boussinesqovega približka za opis temperaturne odvisnosti gostote, kjer privzamemo, da je sprememba gostote dovolj majhna, da jo zanemarimo povsod, razen v gravitacijskem členu. Takšna predpostavka posredno implicira, da so vsi pospeški znotraj toka tekočine majhni v primerjavi z gravitacijskim pospeškom (\mathbf{g}) ($|\frac{D\mathbf{v}}{Dt}| \ll |\mathbf{g}|$) [42]. Vpliv temperaturne odvisnosti gostote se tako odraža le v zunanji sili $\mathbf{f}^{(zun)}$ gibalne enačbe (2.11)

$$\mathbf{f}^{(zun)} = \Delta\rho\mathbf{g} = -\beta\rho\Delta T\mathbf{g}, \quad (2.19)$$

kjer sta β temperaturni koeficient prostorninskega raztezka in ΔT sprememba temperature. Z upoštevanjem $|\frac{\Delta\rho}{\rho}| \ll 1$, je prispevek k zunanji sili zelo majhen in zato tudi pospeški znotraj toka tekočine ostanejo majhni, v primerjavi z gravitacijskim pospeškom.

2.2 Model naravne konvekcije v zaprti kotanji

Predstavili smo vse mehanizme, ki jih potrebujemo za opis naravne konvekcije nestisljive tekočine. Model temelji na sistemu treh sklopljenih parcialnih diferencialnih enačb - dveh skalarnih, ki opisujeta tlak in temperaturo, ter ene vektorske, ki opisuje hitrostno polje. Sistem dopolni Oswald-de Waelov model viskoznosti. Problem rešujemo v dvodimenzionalni diferencialno segreti zaprti kotanji (slika 2.3), kjer na levem robu predpišemo temperaturo T_H ter na desnem robu temperaturo T_C . Zgornji in spodnji rob sta toplotno izolirana. Vsi robovi so neprepustni in nedrseči. Sistem zapišemo kot

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.20)$$

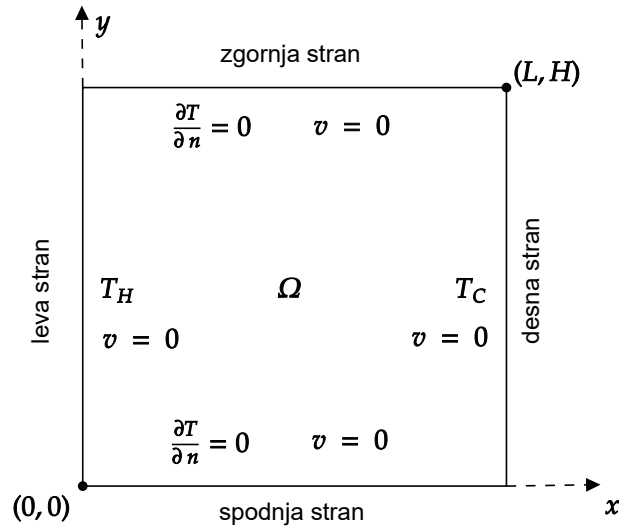
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{v}) - \mathbf{g} \rho \beta \Delta T, \quad (2.21)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (2.22)$$

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\| \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.23)$$

Parametre dinamičnih lastnosti sistema opišemo z dvema brezdimenzijskima številoma. *Rayleighovo število* (Ra) opisuje način termalne dinamike sistema. Pri nizkih Rayleighovih številih je tok tekočine laminaren in večina transporta toplote poteka preko difuzije, medtem ko pri večjih vrednostih tok postaja turbulenten, kjer prevladuje konvektivni prenos toplote. *Prandtlovo število* (Pr) je lastnost tekočine in predstavlja razmerje med difuzijo toplote in difuzijo gibalne količine. V newtonskih tekočinah brezdimenzijski števili izračunamo iz parametrov primera in tekočine

$$\text{Ra}_0 = \frac{\rho^2 c_p g \beta \Delta T H^3}{\eta \lambda} \quad \text{in} \quad \text{Pr}_0 = \frac{\eta c_p}{\lambda}, \quad (2.24)$$



Slika 2.3: Skica numeričnega primera.

za višino votline H . Zgornja definicija se v nenewtonskih tekočinah izkaže za nepri-
merno, saj se tako definirani števili Ra in Pr v sistemu lokalno spreminjata.

Viskoznost izrazimo s karakterističnimi vrednostmi [25]

$$\eta \sim \eta_0 \dot{\gamma}_{\text{karak.}}^{n-1} \sim \eta_0 \left(\frac{v_{\text{karak.}}}{L} \right)^{n-1} \sim \eta_0 \left(\frac{\alpha}{LH} \right)^{n-1}, \quad (2.25)$$

kjer je z L označena širina kotanje, ki je v obravnavanih primerih vedno enaka 1 in jo bomo v nadaljevanju izpustili, in z $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ toplotno prevodnostjo. V nadaljevanju tako uporabimo brezdimenzijski števili

$$Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T H^{n+2}}{\alpha^n \eta_0} \quad \text{in} \quad Pr = \frac{\eta_0}{\rho} \alpha^{n-2} H^{1-n}. \quad (2.26)$$

Pogosto se rezultate ovrednoti (Nu), ki opisuje razmerje med konvektivnim in pre-
vodnim prenosom toplote na robovih. Sledimo definiciji iz [25]

$$Nu = \frac{L}{T_H - T_C} \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.27)$$

Vpeljimo še brez dimenzijski čas [25]

$$\tilde{t} = \frac{\lambda}{\rho c_p H^2} t. \quad (2.28)$$

2.3 Numerični rešitveni postopek

Sistem enačb nima analitične rešitve zato ga bomo reševali numerično. Za nu-
merično rešitev moramo diskretizirati prostor in čas ter poskrbeti za nelinearno
tlačno-hitrostno sklopitev. Za aproksimacijo krajevnih diferencialnih operatorjev

uporabimo posplošeno metodo končnih diferenc [43], za časovno korakanje uporabimo eksplisitno Eulerjevo metodo in tlačno-hitrostno sklopitev rešimo s Chorinovo projekcijsko metodo [44].

V prvem koraku si oglejmo krajevno diskretizacijo. Obravnavano območje (Ω) enakomerno pokrijemo z računskimi točkami z medsebojnim razmakom h . Označimo skupno število točk N , od tega naj jih bo N_b na robu in N_i v notranjosti. Vsaki točki p pripišemo soseščino $S(p) = \{s_{p,1}, \dots, s_{p,n}\}$, sestavljeno iz n najbližjih sosedov x_i (vključno s točko x_i). Podobno kot običajna metoda končnih diferenc, tudi posplošena metoda končnih diferenc išče aproksimacijo operatorja \mathcal{L} na splošni funkciji u v točki p v obliki

$$(\mathcal{L}u)(p) \approx \sum_{i=1}^n w_i u(s_{p,i}). \quad (2.29)$$

Želimo si, da bi bila aproksimacija (2.29) točna za čim več funkcij u . V našem primeru zahtevamo točnost aproksimacije za monome do drugega reda. Če označimo $m_0((x, y)) = 1$, $m_1((x, y)) = x$, $m_2((x, y)) = y$, $m_3((x, y)) = x^2$, $m_4((x, y)) = xy$, $m_5((x, y)) = y^2$, nam zahteve točnosti

$$(\mathcal{L}m_j)(p) = \sum_{i=1}^n w_i m_j(s_{p,i}) \quad (2.30)$$

tvorijo sistem m linearnih enačb z n neznankami:

$$\begin{bmatrix} m_1(s_{p,1}) & \cdots & m_1(s_{p,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_5(s_{p,1}) & \cdots & m_5(s_{p,n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}m_1)(p) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}m_5)(p) \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Označimo zgornji sistem z $M\mathbf{w} = \boldsymbol{\ell}$. V splošnem je število točk v soseščini n večje od števila monomov, za katere zahtevamo točnost aproksimacije, kar nam pusti $n-5$ prostostnih stopenj pri izbiri uteži w_i . Te porabimo tako, da zahtevamo, da so uteži čim manjše – minimizirati želimo uteženo normo vektorja uteži $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$. Natančneje, uteži w_i so rešitev naslednjega optimizacijskega problema:

$$\min_{w_1, \dots, w_n} \sum_{i=1}^n (w_i/\psi_i)^2 \quad \text{pri pogoju } M\mathbf{w} = \boldsymbol{\ell}, \quad (2.32)$$

kjer uteži ψ_i iz norme pogosto izberemo iz Gaussove funkcije $\psi_i = \exp(-\|p - s_{p,i}\|^2/\sigma_G^2)$, za določen skalar σ_G . S tako izbiro uteži ψ_i dosežemo, da je utež w_i , ki pripada točki p sorazmerno večja kot ostale, kar vodi v numerično ugodnejše lastnosti (matrika sistema je bližje diagonalno dominantni).

Minimizacijski problem (2.32) lahko gledamo tudi kot poddoločen linearni sistem, pri katerem iščemo rešitev z minimalno normo. Za take sisteme obstajajo standardni postopki reševanja z QR ali SVD razcepom [45], v splošnem pa lahko napišemo rešitev kot

$$\mathbf{w} = \Psi^2 M^T (M \Psi^2 M^T)^{-1} \boldsymbol{\ell}, \quad (2.33)$$

kjer je Ψ diagonalna matrika uteži ψ_i .

S pomočjo enačbe (2.33) izračunamo aproksimacijske uteži \mathbf{w} za vsak operator in za vsako točko diskretizirane domene vnaprej, še preden začnemo s časovno iteracijo. V primeru klasičnih končnih diferenc je $n = 5$ in soseščina ima (v notranjosti domene) vedno enako obliko in lahko postopek izračuna uteži izvedemo kar na roko. Opisani postopek je splošen in dovoljuje uporabo več točk iz soseščine, ki niso nujno vedno enako razporejene. Za reševanje našega problema bomo uporabili $n = 12$ točk. Vnaprej bomo izračunali uteži $\mathbf{w}(x_i, \frac{\partial}{\partial x_j})$ za vse parcialne odvode $\frac{\partial}{\partial x_j}$ za vse točke x_i v domeni. Ko želimo dobiti aproksimacijo npr. gradienta hitrosti \mathbf{v} , moramo vsak izraz $\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ ovrednoten v neki točki p le zamenjati z aproksimacijo

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_j}(p) \approx \sum_{i=1}^n w_k(p, \frac{\partial}{\partial x_j}) v_k(s_{p,i}), \quad (2.34)$$

ki jo enostavno in učinkovito izračunamo z zgornjim skalarnim produktom vektorjev uteži in vrednosti polja.

Časovno korakanje izvedemo z eksplicitno Eulerjevo metodo, kjer za izračun novega časovnega uporabimo vrednosti obravnavanih polj iz prejšnjega časovnega koraka. Kot primer si oglejmo časovno diskretizirano enačbo (2.21):

$$\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 - (\mathbf{v}_1 \nabla) \cdot \mathbf{v}_1 + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{g} \rho \beta \Delta T, \quad (2.35)$$

kjer indeksa 1 in 2 označujeta prejšnji in trenutni časovni korak ter Δt razliko med njima. Ostane nam še tlačno-hitrostna sklopitev, ki jo rešimo s Chorinovo projekcijsko metodo [44]. V prvem koraku s pomočjo enačbe (2.35), v kateri zanemarimo tlak, izračunamo hitrost

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} \nabla p_1 - (\mathbf{v}_1 \nabla) \cdot \mathbf{v}_1 + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{g} \rho \beta \Delta T \right), \quad (2.36)$$

ki ne zadosti enačbi (2.20) in jo zato imenujemo *vmesna* hitrost. Vmesni hitrosti prištejmo tak popravek $\tilde{\mathbf{v}}$, da bo popravljena hitrost zadostila enačbi (2.20)

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (2.37)$$

Predpostavimo, da je popravek hitrosti odvisen le od tlaka, to zapišemo kot

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla p. \quad (2.38)$$

Na enačbo (2.38) delujmo z divergenco in upoštevajmo (2.37), da dobimo znano tlačno Poissonovo enačbo

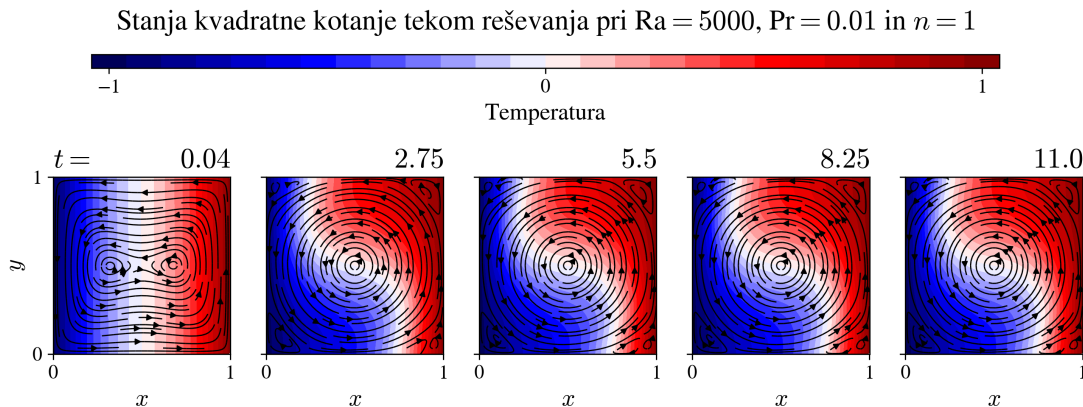
$$\nabla^2 p = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.39)$$

Robne pogoje za enačbo (2.39) dobimo tako, da enačbo (2.38) na robu pomnožimo z normalnim vektorjem in upoštevamo robne pogoje za hitrost, dobimo

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{za } \mathbf{r} \in \partial \Omega \quad (2.40)$$

Opazimo, da imamo samo Neumannove robne pogoje, kar pomeni, da je rešitev tlačne enačbe določena do konstante natančno. Problem rešimo z dodatno zahtevo

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0, \quad (2.41)$$



Slika 2.4: Stanja kvadratne kotanje tekom reševanja za $Ra = 5000$, $Pr = 0,01$ in $n = 0,8$. Temperaturno polje je prikazano z barvnim ozadjem in smer toka s tokovnicami.

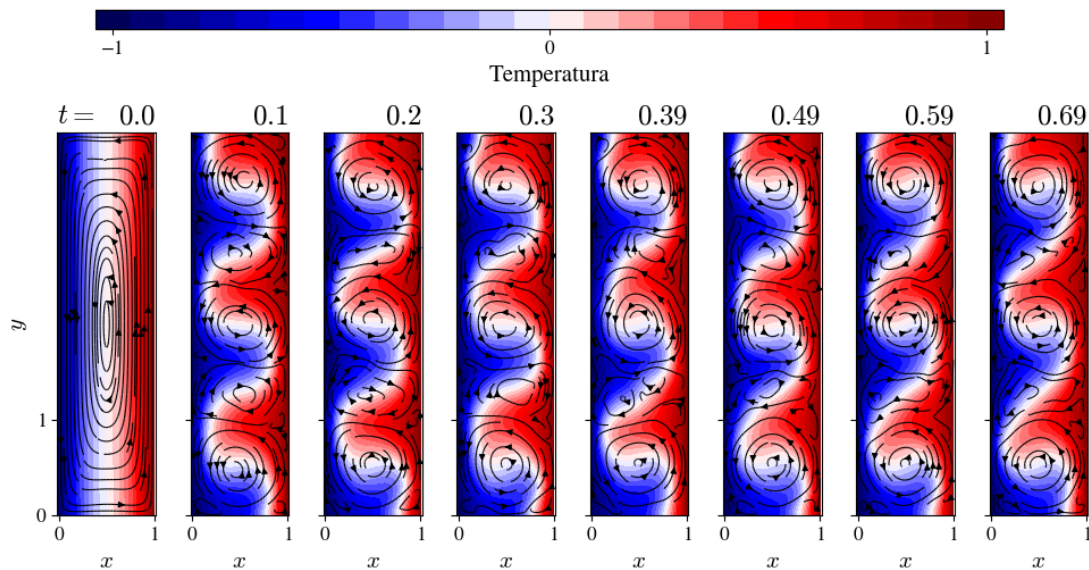
s čimer imamo vse pripravljeno za numerično reševanje danega problema. Rešitveni postopek implementiramo v programskem jeziku *C++* s pomočjo odprto-kodne knjižnice *Medusa* [46].

2.4 Numerični primeri

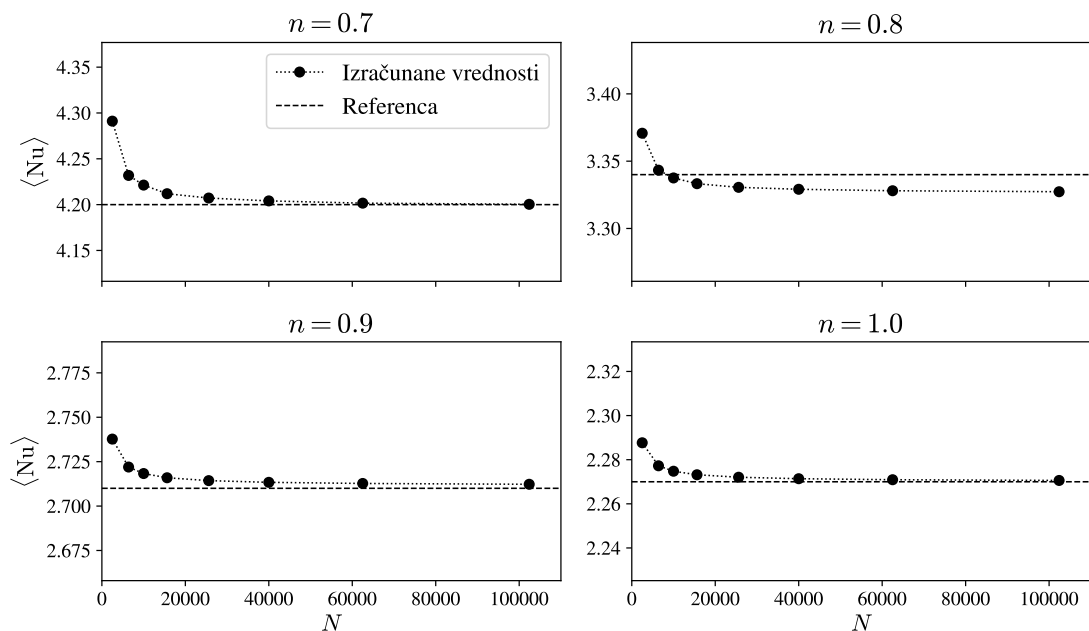
Pripravljeno imamo že vse potrebno za izračun dinamike naravne konvekcije. Na sliki 2.4 predstavimo nekaj časovnih izsekov rešitve naravne konvekcije psevdoelastične $n = 0,8$ newtonske tekočine s Prandtlovim številom $Pr = 0,01$ pri pogojih $Ra = 5000$. Dokaj dolgočasen potek se umiri v stacionarnem stanju. Nekoliko bolj zanimiva dinamika se razvije pri naravni konvekciji v pravokotni kotanji 2.5 pri bolj agresivnih pogojih $Ra = 500\,000$, kjer se rešitev ne umiri, temveč preide v stabilno nihanje treh vrtincev.

V naslednjem koraku preverimo ali se naša rešitev ujema z rezultati iz literature [25], kjer naredimo primerjavo za tri newtonske tekočine in newtonsko tekočino s $Pr = 10$ pri pogojih $Ra = 10^4$. Primerjamo povprečno Nusseltovo število na levem robu kotanje. Zanimata nas ali se rešitev ujema z referenčnimi vrednostmi in ali se rešitev obnaša konvergentno. Slika 2.6 nudi odgovor na obe vprašanji. Za vse štiri primerjave dobimo relativno dobro ujemanje, prav tako v vseh štirih primerih naša rešitve konvergira na relativno širokem intervalu diskretizacijskih točk.

Stanja pokončne kotanje tekem reševanja pri $Ra = 500000$, $Pr = 0.01$ in $n = 0.8$



Slika 2.5: Stanja pokončne pravokotne kotanje tekem reševanja za $Ra = 500\,000$, $Pr = 0,01$ in $n = 0,8$. Temperaturno polje je prikazano z barvnim ozadjem in smer toka s tokovnicami.



Slika 2.6: Prikaz konvergence povprečne vrednosti Nusseltovega števila ob povečevanju natančnosti diskretizacije za različne stopnje nenevtonskosti. Prekinjena vodoravna črta predstavlja referenčno vrednosti iz [25].

Poglavje 3

Modalna dekompozicija

Analiza hidrodinamičnih sistemov je zapleten proces, saj količina podatkov, ki jih tipično dobimo iz rešitve problema, hitro preseže človeško sposobnost obdelave. To nas spodbudi k iskanju načinov za izločanje najpomembnejših elementov rešitve. Razširjena metoda za določanje glavnih elementov dinamike iz časovnih zaporedij je *modalna dekompozicija*. Uporabimo njeno izpeljanko, tj. *dinamično modalno dekompozicijo* (DMD, ang. dynamic mode decomposition) [47–52], ki združuje krajevne lastnosti *ortogonalne dekompozicije* in frekvenčne lastnosti *Fourierove transformacije*. Z njo lahko poleg krajevne identifikacije pomembnih dinamičnih komponent sistema izluščimo tudi njihov časovni potek. DMD je bila prvotno razvita in uporabljena v okviru hidrodinamike, a je bila kasneje zaradi svoje splošnosti uporabljena tudi na drugih področjih, npr. za prepoznavanje ozadja pri računalniškem vidu [53], pri analizi širjenja nalezljivih bolezni [54], itd.

3.1 Algoritem

Metoda DMD je osnovana na obdelavi numeričnih oziroma eksperimentalnih podatkov. Osnovna ideja dekompozicije je iskanje linearne preslikave \mathbf{A} ,

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \quad (3.1)$$

ki kar najbolje poveže zaporedni stanji sistema \mathbf{v}_i in \mathbf{v}_{i+1} , časovno razmaknjeni za Δt . V nelinearnih sistemih nam \mathbf{A} podaja končno dimenzionalno aproksimacijo neskončno dimenzionalnega linearnega *Koopmanovega operatorja*. Koopmanov operator in povezava z DMD sta natančneje opisana v dodatku A.

V nadaljevanju bomo opisali algoritem za *točno DMD* (ang. exact DMD) povzet po [49]. Algoritem deluje na zaporednih stanjih sistema \mathbf{v}_i dolžine M , ki jih vzorčimo z izbranim časovnim razmakom Δt . Posamezna stanja sploščimo v stolpce in zložimo v matriko stanj

$$\mathbf{V}_i^N = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i & \mathbf{v}_{i+1} & \cdots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

kjer je N število vzorčenj stanj sistema.

V obravnavanih sistemih je število elementov v posameznem stanju M praviloma veliko večje od števila vzorčenj N . Pomeni, da so matrike stanj \mathbf{V}_i^N visoke in ozke, kar v algoritmu izkoristimo za učinkovit izračun modalne dekompozicije $M \times M$ matrike \mathbf{A} .

Linearno preslikavo (3.1) zapišimo na zaporednih¹ stanjih:

$$\mathbf{V}_1^N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_0 & \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{V}_0^{N-1} \quad (3.3)$$

in na matriki predhodnih stanj \mathbf{V}_0^{N-1} opravimo reduciran singularni razcep (SVD, ang. singular value decomposition)

$$\mathbf{V}_0^{N-1} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^\dagger. \quad (3.4)$$

Singularni razcep ima že sam po sebi fizikalni pomen. Stolpci matrike \mathbf{U} predstavljajo lastne vektorje ortogonalnega razcepa (POD, ang. proper orthogonal decomposition), singularne vrednosti v diagonalni matriki \mathbf{S} pa njihovo moč². Dimenzionalnost³ dinamike lahko razberemo že iz nabora singularnih vrednosti. V primeru nizko dimenzionalne dinamike so singularnih vrednosti eksponentno padajoče in lahko postopek nadaljujemo s prirezanim SVD razcepom, kjer ohranimo le prvih r singularnih vrednosti in pripadajočih levih ter desnih lastnih vektorjev. S prirezom pospešimo numerični izračun in zmanjšamo vpliv šuma. Pri tem moramo biti pazljivi, da ne odrežemo šibkih, a še vedno pomembnih, delov dinamičnih lastnosti obravnavanega sistema.

Razcep (3.4) vstavimo v enačbo (3.3) in jo preoblikujemo:

$$\mathbf{V}_1^N = \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^\dagger \quad (3.5)$$

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{U} := \tilde{\mathbf{A}}. \quad (3.6)$$

Tu $\tilde{\mathbf{A}}$ predstavlja projekcijo \mathbf{A} na lastne vektorje ortogonalne dekompozicije. Tak zapis je ugodnejši, saj je $\tilde{\mathbf{A}}$ velikosti $r \times r$ namesto originalne $M \times M$ matrike \mathbf{A} .

V nadaljevanju poiščemo lastne vrednosti λ in lastne vektorje \mathbf{w} matrike $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}. \quad (3.7)$$

Lastne vrednosti $\tilde{\mathbf{A}}$ in \mathbf{A} so enake, lastne vektorje pa preslikamo iz projicirane reprezentacije kot

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{w}, \quad (3.8)$$

kjer smo s $\boldsymbol{\varphi}$ označili lastne vektorje \mathbf{A} . V nadaljevanju $\boldsymbol{\varphi}$ imenujemo tudi lastni vektorji DMD. Povezava je natančneje utemeljena v dodatku B.

Razlika med algoritmoma za točno in običajno oziroma projicirano DMD (ang. projected DMD) iz [34] je v izrazu (3.8) za pretvorbo lastnih vektorjev $\tilde{\mathbf{A}}$. Prednost točne DMD je, da so lastni vektorji dejansko pravi lastni vektorji \mathbf{A} in ne le njihova projekcija na \mathbf{V}_0^{N-1} , ter, da deluje na parih zaporednih vrednosti namesto na celotnem zaporedju.

¹Zapis z zaporednimi stanji je priročen za analizo hidrodinamičnih sistemov, kjer so le ta zaradi sekvenčne narave reševanja na voljo. To ni splošna omejitev algoritma. Algoritem potrebuje le zaporedne pare z_i in $f(z_i)$, kjer f predstavlja razvoj analiziranega sistema v izbranem časovnem intervalu.

²Koeficient, ki podaja vpliv posameznega lastnega vektorja v linearni kombinaciji.

³Koliko lastnih načinov potrebujemo za dober opis dinamike.

3.2 Propagacija in pomen lastnih vrednosti

Rešitve lastnega problema operatorja \mathbf{A} se v literaturi običajno uporabljajo za analizo dinamičnega sistema, lahko pa jih uporabimo tudi za (nizko dimenzionalno) napoved obnašanja. Stanje za poljuben čas $t_i = t_0 + i\Delta t$ lahko v diskretni obliki zapišemo kot

$$\mathbf{v}_i = \sum_k^r \varphi_k \lambda_k^i b_k, \quad (3.9)$$

kjer vektor $\mathbf{b} = (b_k)$ predstavlja projekcijske koeficiente stanja on t_0 v prostoru, ki ga razpenjajo lastni vektorji. Izračun \mathbf{b} je natančneje opisan v poglavju 3.3.

Zanima nas zvezno obnašanje obravnavanega sistema. Diskretno vzorčeni podatki pravzaprav predstavljajo stanja zveznega sistema

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Zvezno in diskretno dinamiko povežemo z

$$\mathbf{A} = \exp(\mathcal{A}\Delta t) \quad (3.11)$$

ter zapišemo zvezno širjenje

$$\mathbf{v}(t) = \sum_k^r \varphi_k \exp(\omega_k t) b_k, \quad (3.12)$$

kjer smo uporabili lastne vrednosti ω_k zvezne preslikave. Te dobimo s pomočjo diskretnih lastnih vrednosti $(\lambda_k)_{k=1}^r$, izračunanih z DMD:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \log(\lambda). \quad (3.13)$$

Lastne vrednosti DMD so v splošnem kompleksna števila iz katerih lahko izluščimo dinamične lastnosti lastnih načinov. Argument lastne vrednosti podaja krožno frekvenco, magnituda pa časovni potek moči lastnega načina.

Pri uporabi DMD na realnih sistemih mora biti tudi rezultat linearne kombinacije lastnih načinov v realnem prostoru. Zahtevi lahko zadostimo na dva načina:

- Lastni načini z realnimi lastnimi vrednostmi in vektorji. Ti predstavljajo načine s frekvenco 0. Njihova magnituda se lahko kljub temu s časom spreminja glede na velikost pripadajoče lastne vrednosti. Kadar povprečje vhodnih podatkov ni enako 0 vedno dobimo glavni lastni način s frekvenco 0 in magnitudo 1, ki predstavlja ozadje.
- Pari kompleksno konjugiranih lastnih vrednosti in vektorjev. Lastni načini s kompleksnimi lastnimi vrednostmi se pojavljajo v kompleksno konjugiranih parih. Imaginarna prispevka para h končnemu rezultatu se izničita in ostane le realni del.

V obravnavi lastnih vrednosti se zato lahko omejimo na zgornjo polovico kompleksne ravnine in realno os, pri prikazu lastnih vektorjev pa zadošča že eden iz kompleksno konjugiranega para.

Na pare oscilatornih lastnih vrednosti moramo biti pazljivi tudi pri prirezu rezultatov SVD razcepa, saj lahko ob neprimerni izbiri r odrežemo polovico para. Problem opazimo predvsem kadar iščemo nizko dimenzionalno reprezentacijo. V nasprotnem primeru izberemo dovolj velik r , da so zadnji še izračunani načini praktično le še šum v podatkih in tudi manjkajoča polovica para ne pokvari rešitve.

3.3 Razvrščanje načinov

Slabost DMD je, da moč lastnih načinov ni jasno razvidna že iz lastnih vektorjev, ki so enotski, in lastnih vrednosti, ki nosijo informacijo o nihanju. Pri določanju moči posameznih lastnih vektorjev se v literaturi [49, 52] večinoma zanašajo na projekcijske koeficiente b_k , ki smo jih uvedli v enačbi (3.9). Takrat smo po lastnih vektorjih razvili le stanje pri t_0 , a je zveza splošna in velja za vse vhodne čase:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_k \varphi_k b_k(t). \quad (3.14)$$

Koeficiente $b_k(t)$ lahko računamo z algoritmom, povzetim po [49]. Algoritem je učinkovit, saj se izogne dodatnim operacijam z izvornimi polnimi matrikami V in uporabi vmesne rezultate glavnega DMD algoritma. Razvoj stanj sistema po lastnih vektorjih DMD zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{V}_0^{N-1} = \Phi \mathbf{B}, \quad (3.15)$$

kjer je $\Phi = [\varphi_0 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_r]$ matrika z lastnimi vektorji DMD v stolpcih in $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_0 \ \mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_{N-1}]$ matrika stolpcev koeficientov razvoja za posamezen časovni korak. Stolpci matrike \mathbf{V}_0^{N-1} so stanja sistema vzorčena ob diskretnih časih t_i . Če so časi vzorčenja zaporedni lahko i -to vrstico matrike \mathbf{B} interpretiramo kot časovni potek prispevkov posameznih lastnih vektorjev. Kompleksno število \mathbf{b}_{ij} podaja prispevek i -tega lastnega vektorja k stanju sistema ob času vzorčenja t_j .

Enačbo z leve pomnožimo z matriko adjungiranih lastnih vektorjev DMD $\Psi = \mathbf{U}\mathbf{Z}$, kjer so stolpci matrike \mathbf{Z} levi lastni vektorji pri dekompoziciji $\tilde{\mathbf{A}}$ in jih lahko izračunamo istočasno kot lastne vektorje \mathbf{w} matrike $\tilde{\mathbf{A}}$. Upoštevamo še ortogonalnost Φ in Ψ ter dobimo:

$$\mathbf{B} = \Psi^\dagger \mathbf{V}_0^{N-1} = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{V}_0^{N-1}. \quad (3.16)$$

Z že izračunanim SVD razcepom $\mathbf{V}_0^{N-1} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^\dagger$ lahko enačbo (3.16) še dodatno preoblikujemo, in se s tem izognemo računanju z veliko matriko \mathbf{V} ter dobimo končni izraz za koeficiente:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{S}\mathbf{W}^\dagger. \quad (3.17)$$

Časovni potek koeficientov želimo zreducirati na eno realno število, ki ga lahko interpretiramo kot moč lastnega načina (P). Moč i -tega izračunamo kot

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |B_{ij}|. \quad (3.18)$$

Z uporabo absolutne vrednosti se izognemo vplivu nihanja in s časovnim povprečjem zajamemo morebitno naraščanje oziroma padanje moči.

3.4 Demonstracija na sintetičnem primeru

Delovanje DMD preizkusimo na sintetičnem primeru z znano preprosto dinamiko. Primer je sestavljen iz štirih delno prekrivajočih se elementov in ozadja, ki nihajo z različnimi frekvencami. Postavitve posameznih elementov je prikazana na sliki 3.1 levo. Sistem vzorčimo s 100 vzorci razmaknjenimi za $\Delta t = 0,1$. Vsak izmed vzorcev je skalarno polje velikosti 100×100 . Elementi dinamičnega sistema so nihajoča območja predstavljena s skalarnim poljem, ki imajo izven podanega lika vrednost 0, znotraj pa časovno odvisno vrednost podano z

$$v_i(t) = k_i \exp\left(\frac{t}{\tau_i}\right) \cos(2\pi\nu_i t), \quad (3.19)$$

kjer je s k označena amplituda, z ν frekvenca in s τ karakteristični čas eksponentnega naraščanja oziroma padanja amplitude in $i \in [A, B, C, D]$. Vrednosti parametrov za posamezne elemente so prikazane v tabeli 3.1. Ozadje opišemo z

$$v_o(x, y, t) = k_o \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right) \cos(2\pi\nu_o t) \sin\left(\pi \frac{x}{100}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{100}\right). \quad (3.20)$$

Ozadje se od ostalih elementov razlikuje po dodatni krajevno odvisni strukturi, ki ima enako obliko kot prvi lastni vektor nihanja kvadratne opne. Vrednosti parametrov za opis ozadja so podane v tabeli 3.1. Parametri nihanja elementov so izbrani tako, da so v sistemu vsebovane različne lastnosti nihanja, ki jih lahko prepoznamo z DMD. Prispevke posameznih elementov združimo v

$$v(x, y, t) = v_o(x, y, t) + \sum_{i \in \{A, B, C, D\}} \chi_i(x, y) v_i(t) + \mathcal{U}(-a, a), \quad (3.21)$$

kjer dodamo enakomerno porazdeljen šum $\mathcal{U}(-a, a)$ z amplitudo a ter s χ_i opišemo obliko posameznih elementov

$$\chi_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (3.22)$$

kjer so Ω_i območja posameznih kvadratov prikazanih na sliki 3.1 levo.

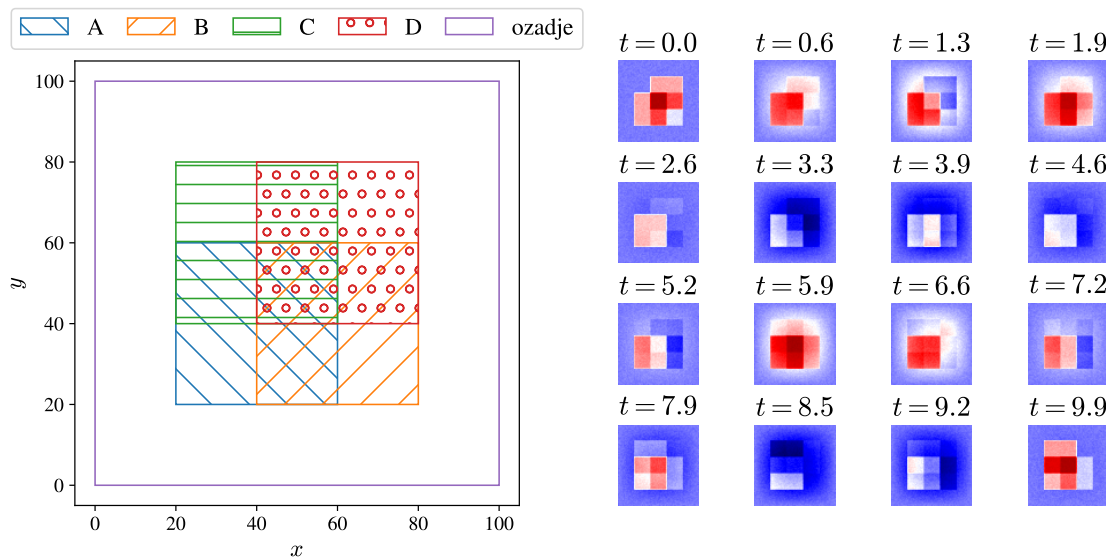
DMD se pogosto primerja z ortogonalno dekompozicijo, ki jo izvedemo prek SVD algoritma in predstavlja enega izmed prvih korakov pri izračunu DMD. Rezultati dekompozicije so prikazani na sliki 3.2. Singularne vrednosti na levem delu slike podajajo hierarhijo moči načinov, z velikostnimi redi razlike med najmočnejšim načinom, najšibkejšim načinom in šumom. Pri nadaljnjem izračunu DMD bi dobili najboljše rezultate, če bi tak SVD prirezali in ohranili le prvih $r = 9$ singularnih vrednosti.

Levi lastni vektorji SVD, ki jih lahko razumemo kot lastne vektorje ortogonalne dekompozicije, so pri prepoznavanju elementov dinamike slabši. Jasno je identificiran le kvadrat A s konstantnim prispevkom k analiziranemu skalarnemu polju. Metoda se izkaže za neprimerno pri identifikaciji posameznih nihajočih elementov.

Pokazali smo, da ortogonalna dekompozicija ne nudi primerne identifikacije oscilatornih načinov, zato uporabimo DMD. Pri analizi sintetičnega problema z DMD smo posebej pazljivi, saj problem ekvivalenten obravnavi stoječih valov. V stoječih

	k	ν	τ
A	1	0	∞
B	0,5	0,5	∞
C	0,01	1	2
D	1	2	-4
o	1	0,2	∞

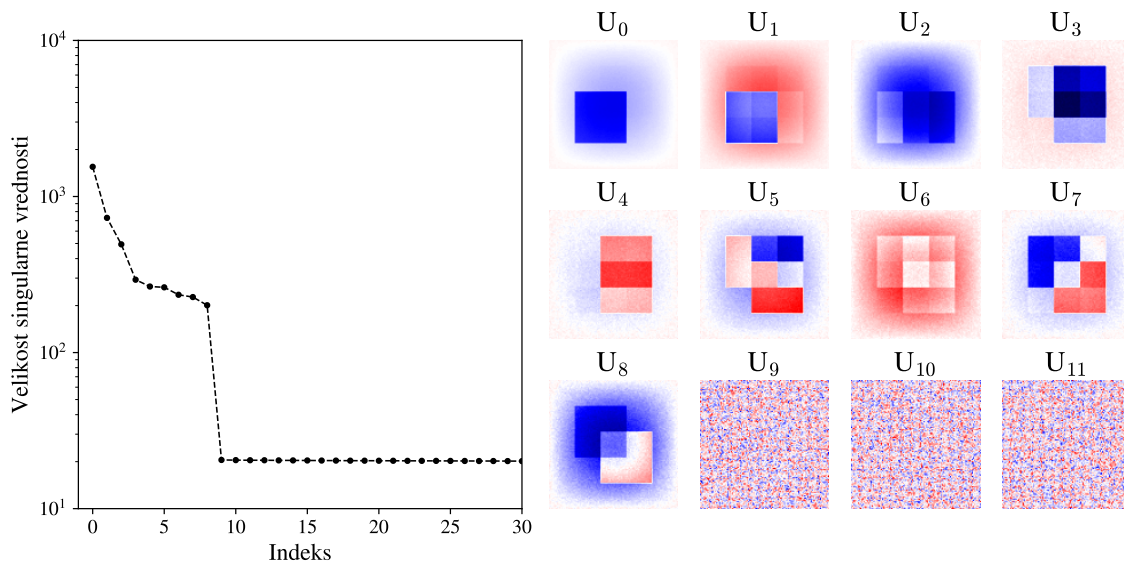
Tabela 3.1: Lastnosti nihanja elementov sintetičnega primera. Prvi stolpec predstavlja amplitudo, drugi frekvenco in tretji značilni čas naraščanja oziroma padanja magnitude.



Slika 3.1: Različne komponente dinamike iz katerih tvorimo celotni sistem (levo). Dinamika sistema je ob nekaj poljubno izbranih časih prikazana na desni polovici slike. Z barvami so označene vrednosti skalarne polja na skali od temno modre za najmanjše preko svetlejših odtenkov in bele do temno rdeče za največje.

valovih so stanja sistema, torej stolpci matrike stanj (3.2), med seboj linearno odvisna. Posledično rang matrike (3.2) ni poln. S SVD razcepom identificiramo enako število singularnih vrednosti, kot je rang razcepljene matrike.

V našem primeru z naivnim pristopom dobimo 5 singularnih vrednosti nad nivojem šuma, kar pa ni dovolj, saj dinamika pri posamezni frekvenci opišemo s parom kompleksno konjugiranih načinov. Za dober opis stoječih valov moramo torej zagotoviti matriko \mathbf{V} z rangom dvakrat večjim od števila prisotnih frekvenc. Zadosten rang zagotovimo z bločnim zlaganjem zaporednih stanj [52] v stolpce in s tem tvo-



Slika 3.2: Levi graf prikazuje singularne vrednosti ortogonalne dekompozicije s SVD algoritmom. Desni graf prikazuje stolpce matrike U , torej leve lastne vektorje SVD, ki jih interpretiramo kot lastne vektorje ortogonalne dekompozicije. Vektorji so urejeni glede na velikosti pripadajočih singularnih vrednosti.

rimo matriko

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_N \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_m & \mathbf{v}_{m+1} & \cdots & \mathbf{v}_{N-m} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

z rangom $\geq m$. Zlaganje zaporednih stanj zmanjša vpliv šuma a efektivno poveča sistem in podaljša računanje.

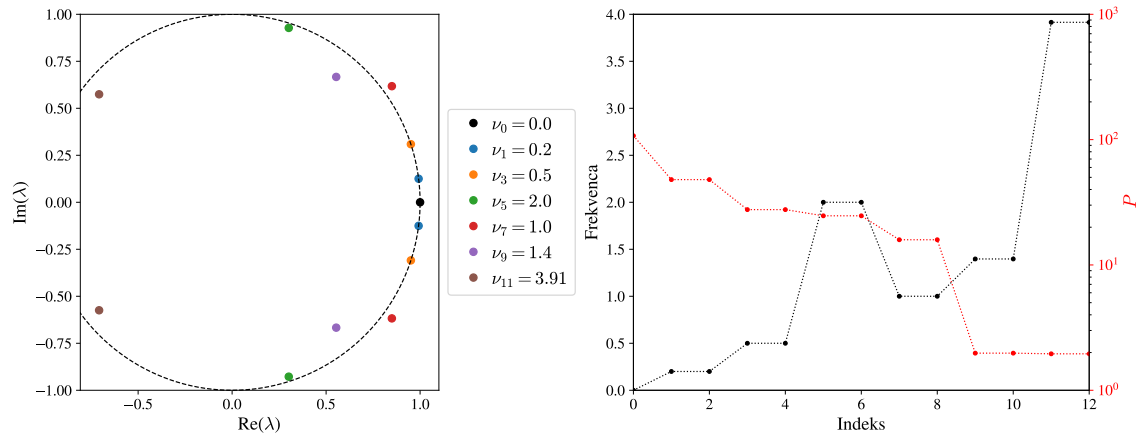
Preostanek postopka izvedemo kot je opisan v poglavju 3.1. Pri nadaljnji uporabi lastnih vektorjev se zavedamo, da so sestavljeni enako kot stolpci matrike stanj V in jih moramo primerno prirezati, da ustrezajo velikosti stanj sistema.

Lastne vrednosti DMD najlažje prikažemo na kompleksni ravnini (slika 3.3 levo). S prekinjeno črto je označen enotski krog. Lastnim vrednostim znotraj enotskega kroga moč pojema, tistim zunaj pa raste. Vidimo tudi, da moč lastne vrednosti z $\nu = 2$ (zeleni) pada, moč lastne vrednosti z $\nu = 1$ (rdeči) pa raste. Opazka se ujema z znano dinamiko kvadratov C in D . Ugotovitev še dodatno potrdimo pri ogledu lastnih vektorjev. Kot pričakovano imamo eno realno lastno frekvenco za konstanten del sistema in pare kompleksno konjugiranih za različne frekvence nihanja.

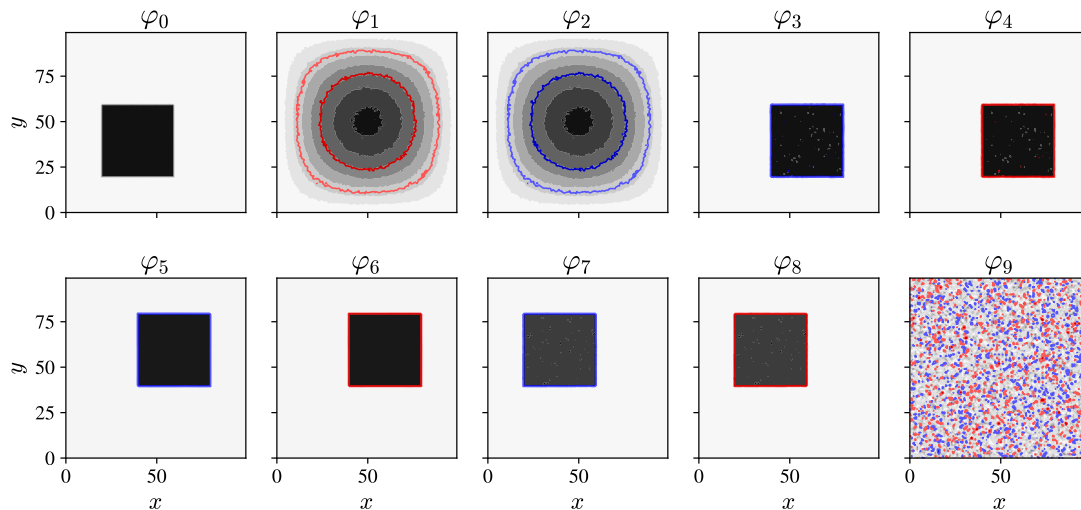
Na desnem grafu slike 3.3 so prikazane frekvence razvrščene po izračunani moči, kot je opisano v poglavju 3.3. Iz izračunanih moči načinov je jasno opazna ločnica med pričakovanimi 5 frekvencami in šumom. Posamezne načine lahko identificiramo glede na njihove frekvence. Razvrstitev po močeh se ujema s pričakovanji, da bo imela amplituda najpomembnejši vpliv. Najmočnejši je vpliv kvadrata A , ki ne niha, sledita mu ozadje in B s konstantno močjo a manjšo amplitudo kot ozadje. Najšibkejša sta pojemajoči C in naraščajoči D .

Z znanjem o vrstnem redu načinov si lahko ogledamo še lastne vektorje na

Poglavje 3. Modalna dekompozicija



Slika 3.3: Levi graf prikazuje lastne vrednosti sintetičnega primera na kompleksni ravnini. S prekinjeno črto je označena enotska krožnica. Desni graf v črni in na levi skali prikazuje frekvence $\nu_i = \frac{\arg(\lambda_i)}{2\pi\Delta t}$ izračunane iz lastnih vrednosti, v rdeči in na desni skali pa moči pripadajočih načinov.



Slika 3.4: Lastni vektorji DMD urejeni po moči. S črno-belo je prikazana absolutna vrednost lastnih vektorjev. Kompleksni del lastnega vektorja je prikazan z nivojnimi, katerih barva predstavlja vrednosti in sicer na razponu od temno modre za majhne do temno rdeče za velike vrednosti.

sliki 3.4, ki so ravno tako razvrščeni po moči. Lastni vektorji zelo dobro identificirajo komponente sintetičnega primera. Šuma je tako malo, da je nemoteč.

Lastni vektor konstantnega načina je le eden in v celoti realen. Lastni vektorji nihajočih načinov se pojavljajo v kompleksno konjugiranih parih, kar vidimo iz nasprotnih barv nivojnic, ki prikazujejo kompleksni del lastnega vektorja. V nadaljevanju bomo zaradi želje po prikazu čim več lastnih vektorjev prikazovali le enega iz kompleksno konjugiranega para.

Poglavje 4

Rezultati

V dosedanjih poglavjih smo pripravili vsa potrebna matematična orodja za analizo dinamičnih načinov naravne konvekcije nenewtonskih tekočin. V tem poglavju se osredotočimo na analizo izračunov. Zanima nas kako se spreminja dinamika sistema, ko spreminjamo pogoje simulacije. Spreminjali bomo n , s katerim opišemo nenewtonsko obnašanje in Rayleighovo število. Analize bomo naredili za tekočino s $Pr = 0.01$. Intuicija nam pravi, da bo z nižanjem n in z višanjem Ra dinamika postajala bolj zanimiva, kar lahko bolj podrobno preverimo preko analize frekvenc in lastnih vektorjev najmočnejših lastnih načinov DMD.

Dinamiko analiziramo na dveh primerih, in sicer na kvadratni in pravokotni kotanji z razmerjem 4 med višino in širino. V obeh primerih si ogledamo okolico oscilatornih rešitev identificiranih v [35]. Oba primera rešimo za 3 vrednosti Ra in razpon nenewtonskih eksponentov med $n = 1$, torej newtonskim primerom, in $n = 0.75$.

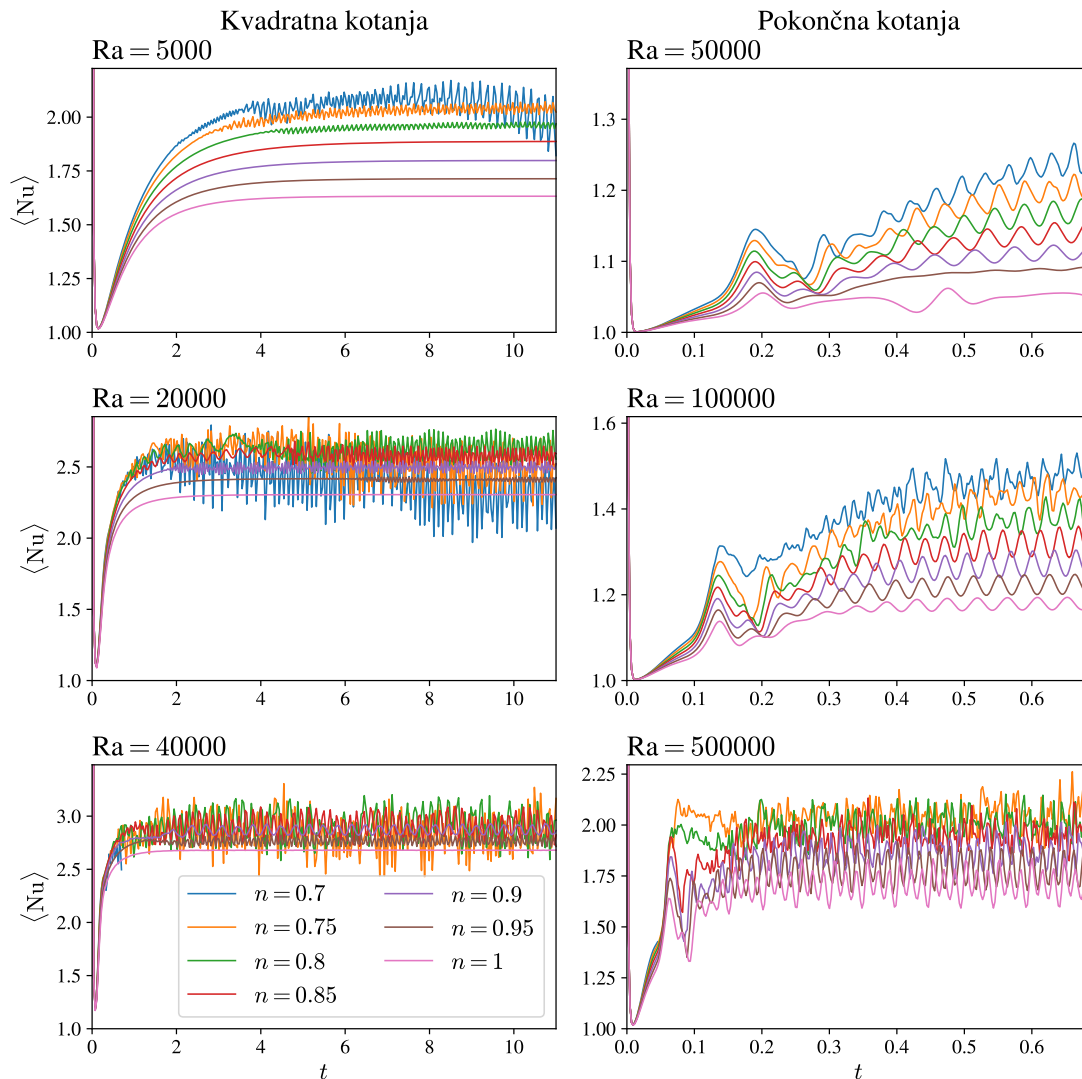
Za potrebe analize z algoritmom DMD smo shranili 500 stanj sistema iz zadnjih 10% reševanja. Dekompozicijo izvajamo na skalarnem polju velikosti hitrosti. Vzorčenje je izbrano tako, da zajame dovolj veliko območje za analizo počasnejših nihanj, a je vseeno dovolj hitro za zajem hitrejših. Pri zajemu frekvenc smo omejeni z *Nyquistovim kriterijem*, ki trdi, da lahko identificiramo le nihanja, ki jih vzorčimo vsaj dvakrat na periodo. Izkaže se, da mora biti za dobro delovanje frekvenca vzorčenja še približno trikrat večja [34].

Grobo idejo o obnašanju sistema lahko razberemo že iz poteka povprečnega Nusseltovega števila prikazanega na sliki 4.1. Iz grafa razberemo, da dinamika z večanjem Ra in manjšanjem n res postaja vse bolj oscilatorna in iregularna.

4.1 Kvadratna kotanja

Podrobnejšo obravnavo dinamike v kvadratni kotanji začnemo z analizo spektrov DMD za vse kombinacije izbranih parametrov Ra in n , ki je prikazana na sliki 4.2. Iz spektrov moči, prikazanih z rdečo, razberemo kako je po lastnih načinih porazdeljena moč. Nihajoče lastne načine prepoznamo po neničelni frekvenci in parih moči v spektru.

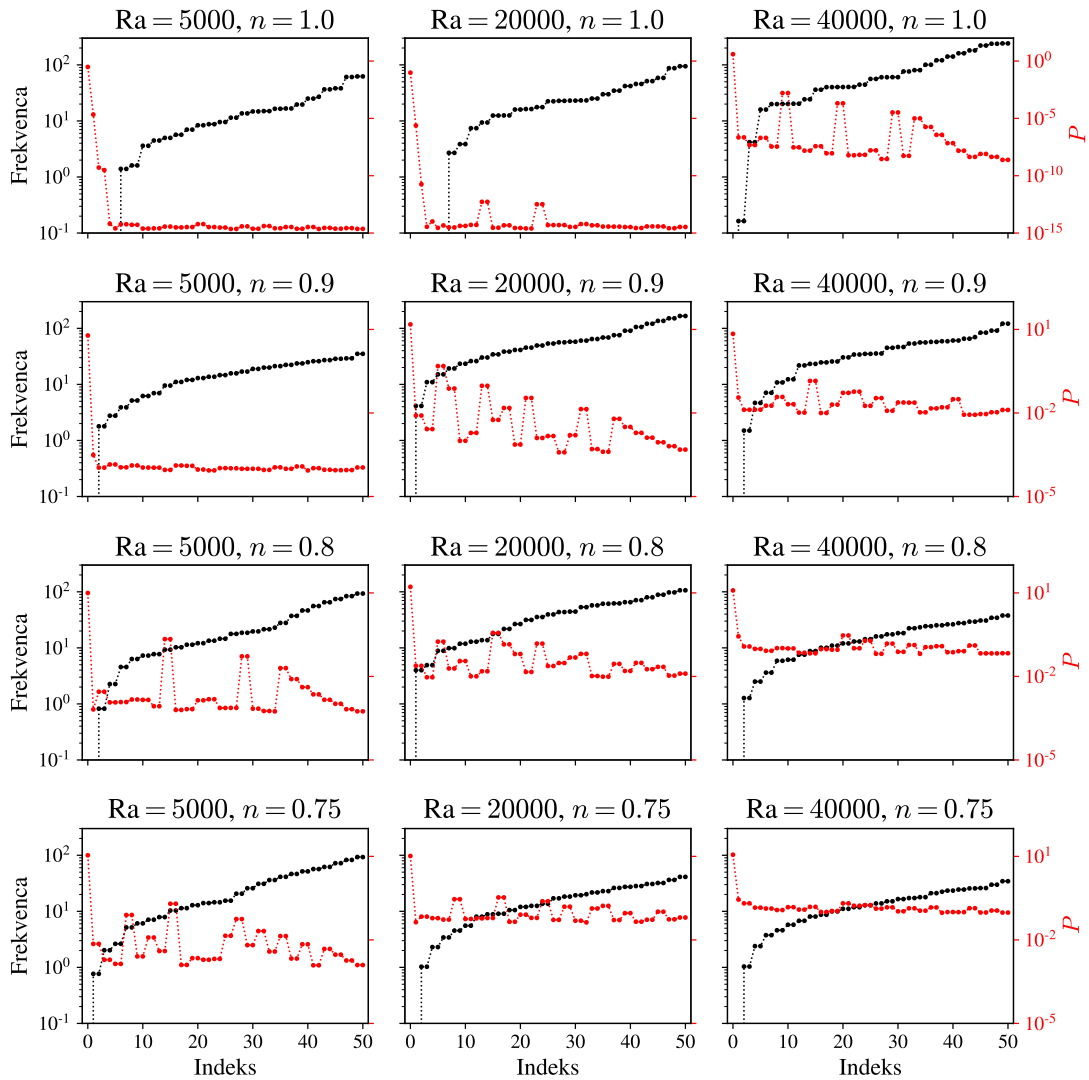
Vsi primeri imajo najmočnejši konstantni način, ki predstavlja ozadje, pri nekaterih, predvsem stacionarnih, pa se pojavljajo tudi dodatni načini s frekvenco 0 in naraščajočo oziroma padajočo močjo. Primer z $Ra = 5000$ in newtonsko tekočino (graf v prvi vrstici prvega stolpca slike 4.2) je povsem stacionaren. Moči načinov



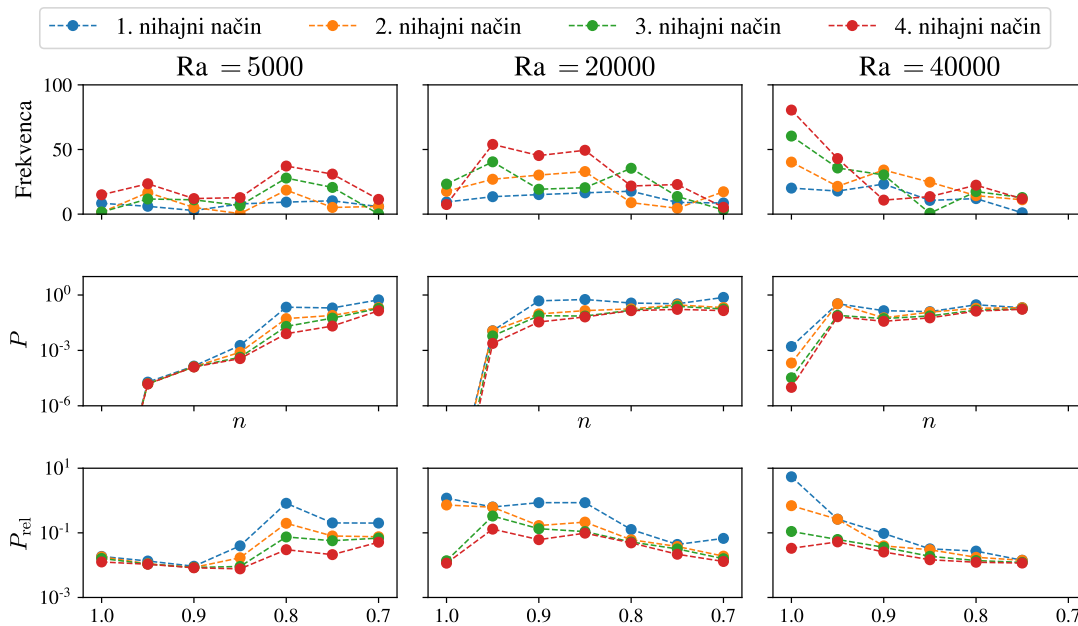
Slika 4.1: Poteka Nusseltovega števila za kvadratno (levo) in pravokotno (desno) kotanjo pri različnih pogojih in za različne nenevtonske eksponente n . Skupna legenda je prikazana na levi spodnji sliki.

z neničelno frekvenco so na nivoju numeričnega šuma. Z večanjem Ra oziroma manjšanju n se začnejo pojavljati nihajni načini z neničelno močjo, govorimo o oscilatornem režimu dinamike. Dober primer tega režima je prikazan na grafu v tretji vrstici prvega stolpca slike 4.2, kjer najmočnejši nihajni načini opazno odstopajo od ostalih. Z nadaljnjim intenziviranjem parametrov se pojavlja več in več nihajnih načinov, med katerimi pa je vse manj razlike v moči, kar nam da slutiti, da se bližamo turbulentnemu režimu. Tako obnašanje opazimo na grafu v četrti vrstici tretjega stolpca slike 4.2, ki prikazuje primer z najbolj iregularno dinamiko. Spekter moči je skoraj raven v primerjavi z ostalimi, ob natančnejšem ogledu pa opazimo, da so vrhovi moči nihajnih načinov praktično enaki kot pri večjem n oziroma manjšem Ra, le nivo vrzeli med njimi se je dvignil.

Obnašanje glavnih nihajnih načinov je natančneje prikazano na sliki 4.3, kjer obravnavamo potek njihove frekvence, moč in relativno moč (P_{rel}) štirih najmočnej-



Slika 4.2: DMD spekter za kvadratno kotanjo prikazuje frekvence lastnih načinov in pripadajoče moči. Posamezni grafi prikazujejo rezultate dekompozicije za vse obravnavane kombinacije parametrov. Frekvence so prikazane s črno barvo in so naraščajoče urejene. Vrednosti frekvenc v posamezni vrstici so označene na levi črni skali. Pripadajoče moči so prikazane z rdečo barvo in urejene tako, da sovpadajo s frekvencami načina. Vrednosti moči v posamezni vrstici so označene na desni rdeči skali. Pri interpretaciji je potrebno upoštevati, da je skala moči v prvi vrstici drugačna kot v ostalih.



Slika 4.3: Spreminjanje frekvence, moči in pomembnosti najmočnejših nihajnih načinov kvadratne kotanje v odvisnosti od eksponenta n , ki določa moč newtonskega obnašanja. Zgornji vrstici prikazujeta odvisnost frekvence in moči, spodnja pa odvisnost deleža skupne moči nihajnih načinov, ki ga zajame obravnavani nihajni način, v odvisnosti od newtonskosti. Moč pri $n = 1$ za $Ra = 5000$ in $Ra = 20000$ je več velikostnih redov manjša ($P \sim 10^{-15}$) in zaradi jasnejše skale ni prikazana. Zainteresiran bralec jo lahko določi iz prve vrstice slike 4.2.

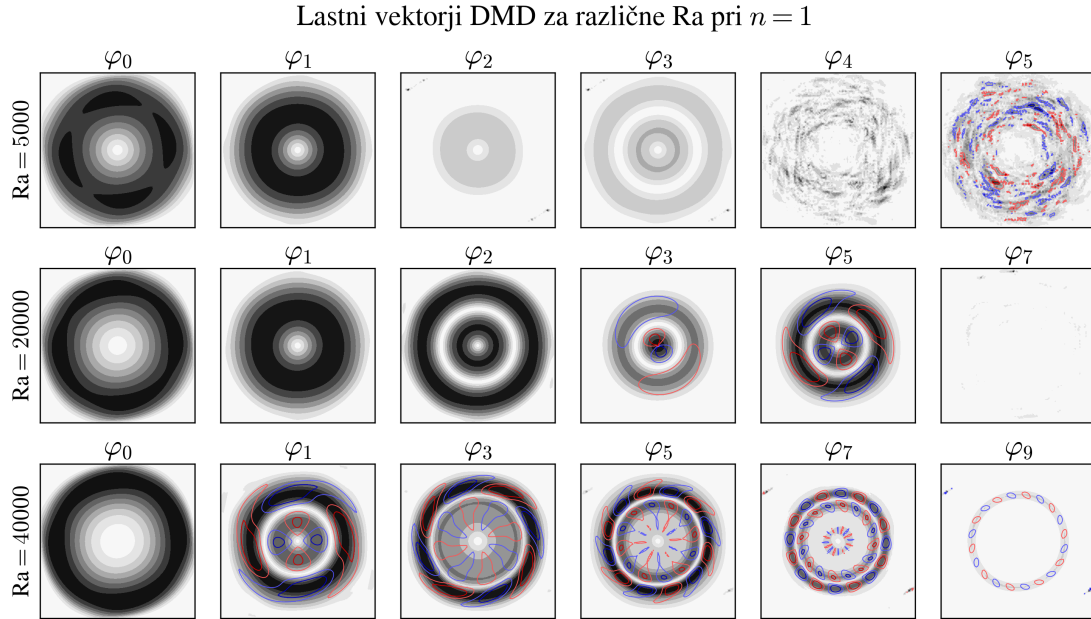
ših nihajnih načinov za različne n . Relativno moč

$$P_{\text{rel}} = \frac{P_i}{\sum_{j \in \{k: \arg \lambda_k \neq 0\}} P_j} \quad (4.1)$$

smo vpeljali, da natančneje ovrednotimo kako izraziti so najdeni nihajni načini.

Z grafi lahko nadgradimo predhodno diskusijo o obnašanju spektra in različnih režimih. Na grafu relativne moči najmočnejših načinov za $Ra = 5000$, torej spodnji graf prvega stolpca na sliki 4.3, opazimo kako je relativna moč štirih načinov pri majhnem n praktično enaka, pri večjih n se relativne moči razcepijo in je prvi opazno močnejši, nakar se pri velikih n relativne moči spet približajo. Pri velikih n podobnost utemeljimo s pomanjkanjem nihajnih načinov, kar potrdi tudi graf moči, ki je praktično zanemarljiva. Ta režim je konstanten. Pri majhnem n pa moč ni zanemarljiva, a relativna pomembnost načinov vseeno pade. To pojasnimo s tem, da nobeden ne izstopa. Podobno je opazno tudi iz prve vrstice, kjer prikazujemo frekvence najmočnejših načinov. Pri velikih in majhnih n so le te praktično enake, saj ni jasnih glavnih nihajnih načinov, na sredini območja pa se razlika poveča in imamo jasno glavno in dodatne frekvence.

Obnašanje je podobno tudi pri odvisnostih za večje Ra prikazanih v 2. in 3. stolpcu z razliko, da zaradi višjega Ra začetno stanje ni stacionarno. V primeru z $Ra = 40000$, torej tretjem stolpcu slike 4.3 je že pri $n = 1$ jasna hirearhija nihajnih načinov, ki pa se ob manjšanju n zabriše zaradi ojačanja predhodno šibkih načinov in dobimo skoraj raven spekter. Iz grafa moči v drugi vrstici lahko potrdimo, da



Slika 4.4: Vpliv Ra na lastne vektorje DMD za kvadratno kotanjo. Absolutna vrednost je prikazana kot črno-bela slika, kjer črna predstavlja večje vrednosti. Kompleksni del lastnega vektorja je prikazan z nivojnimi, katerih barva predstavlja vrednosti in sicer na razponu od temno modre za majhne do temno rdeče za velike vrednosti. Prikazanih je 6 lastnih vektorjev najmočnejših načinov, kjer za oscilatorne prikažemo le enega iz kompleksno konjugiranega para. Razpon parametrov sovпада s prvo vrstico na sliki 4.2.

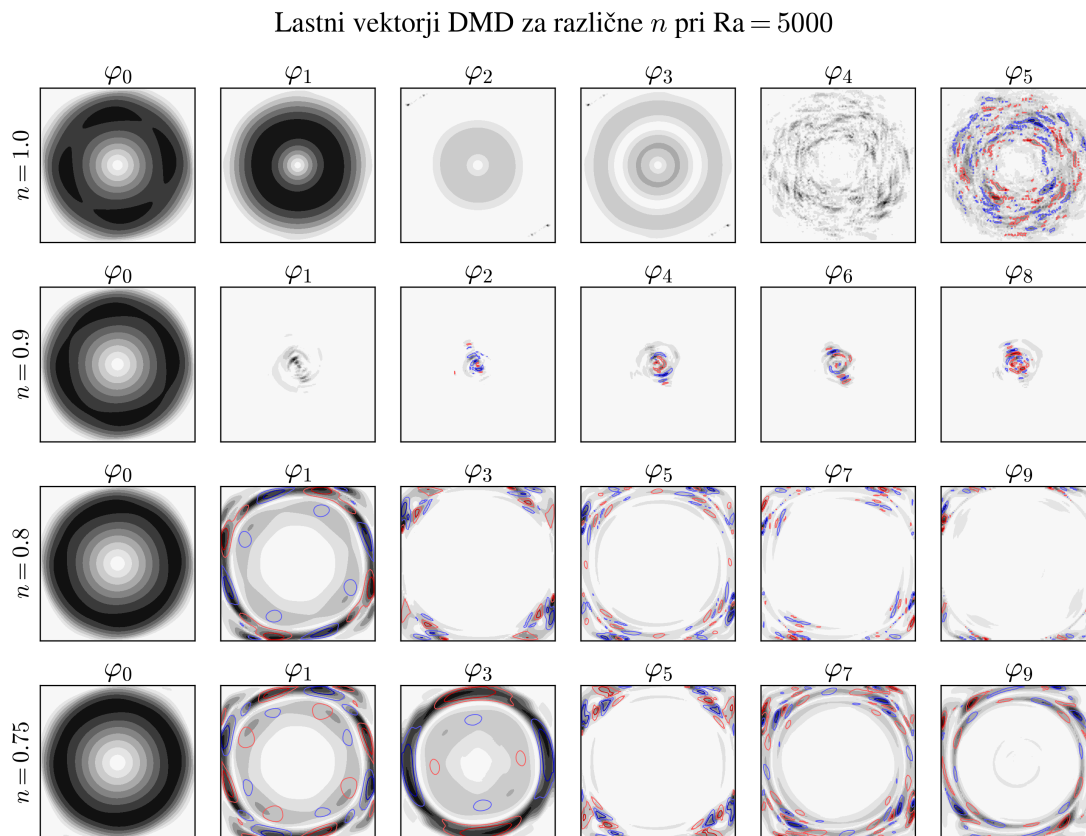
se je moč res izenačila z jačanjem šibejših, saj moč najmočnejših ostane praktično enaka oziroma se še rahlo poveča.

Zaradi podobnosti med obnašanjem za različne Ra lahko sklepamo, da se bodo tudi pri nižjih Ra za še manjše n relativne moči nihajnih načinov izenačile podobno kot pri $Ra = 40000$.

Iz grafov lastnih frekvenc smo uspeli ugotoviti, da se z večanjem Ra in manjšanjem n dinamika res bogati in da se pojavlja vse več nihajočih načinov. Spektri na stranskih diagonalah slike 4.2 so si podobni, zato nas zanima ali oba parametra vedita v enako dinamiko. K primerjavi pristopimo z izrisom lastnih vektorjev najmočnejših načinov za fiksno $n = 1$ in spreminjajoč Ra na sliki 4.4 ter fiksno $Ra = 5000$ in spreminjajoč n na sliki 4.5. Sliki torej predstavljata lastne vektorje najmočnejših načinov iz prve vrstice in prvega stolpca slike 4.2. Izrisujemo le en vektor izmed kompleksno konjugiranega para. Lastne vektorje nihajnih načinov prepoznamo po rdeče-modrih nivojnicah, ki prikazujejo kompleksni del lastnega vektorja.

Iz lastnih vektorjev lahko razberemo, da se dinamika s povečevanjem Ra spreminja drugače, kot z manjšanjem n . Z večanjem Ra vzbudimo predvsem nihajne načine na sredini kotanje, kar predstavlja opletanje glavnega vrtinca. Z manjšanjem n pa načine ob robovih in v vogalih, kar interpretiramo kot nove majhne vrtince.

Obnašanje se fundamentalno razlikuje, kar potrjuje, da uvedba nenewtonskosti pripelje do novih pojavov in ne zgolj spremembe režima, ki bi mu ustrezalo drugačno brezdimenzijsko število.



Slika 4.5: Vpliv n na lastne vektorje DMD za kvadratno kotanjo. Absolutna vrednost je prikazana kot črno-bela slika, kjer črna predstavlja večje vrednosti. Kompleksni del lastnega vektorja je prikazan z nivojnicami, katerih barva predstavlja vrednosti in sicer na razponu od temno modre za majhne do temno rdeče za velike vrednosti. Prikazanih je 6 lastnih vektorjev najmočnejših načinov, kjer za oscilatorne prikažemo le enega iz kompleksno konjugiranega para. Razpon parametrov sovpada s prvim stolpcem na sliki 4.2.

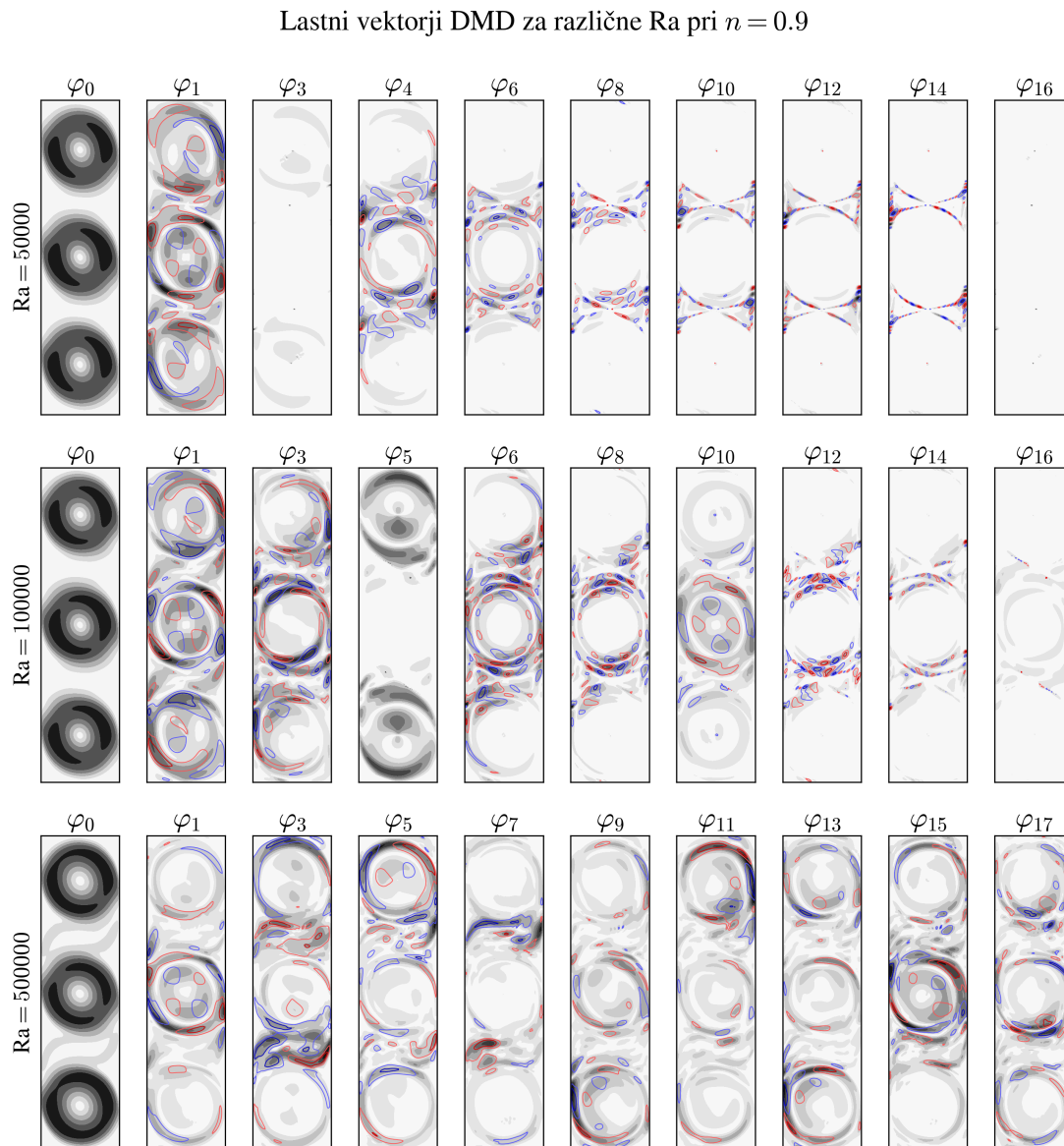
4.2 Pravokotna kotanja

Obravnavali smo tudi problem s spremenjeno geometrijo problema. Ogleдали smo si obnašanje v pravokotni kotanji, ki ima živahnejša dinamiko. Pojavijo se trije glavni vrtinci namesto enega. Iz spektrov DMD načinov lahko potegnemo podobne zaključke, kot pri kvadratnem primeru, in so kot taki nezanimivi. S kratko diskusijo so prikazani v dodatku 6. Ogleđamo si lastne vektorje, ki so bogatejši kot pri kvadratni kotanji.

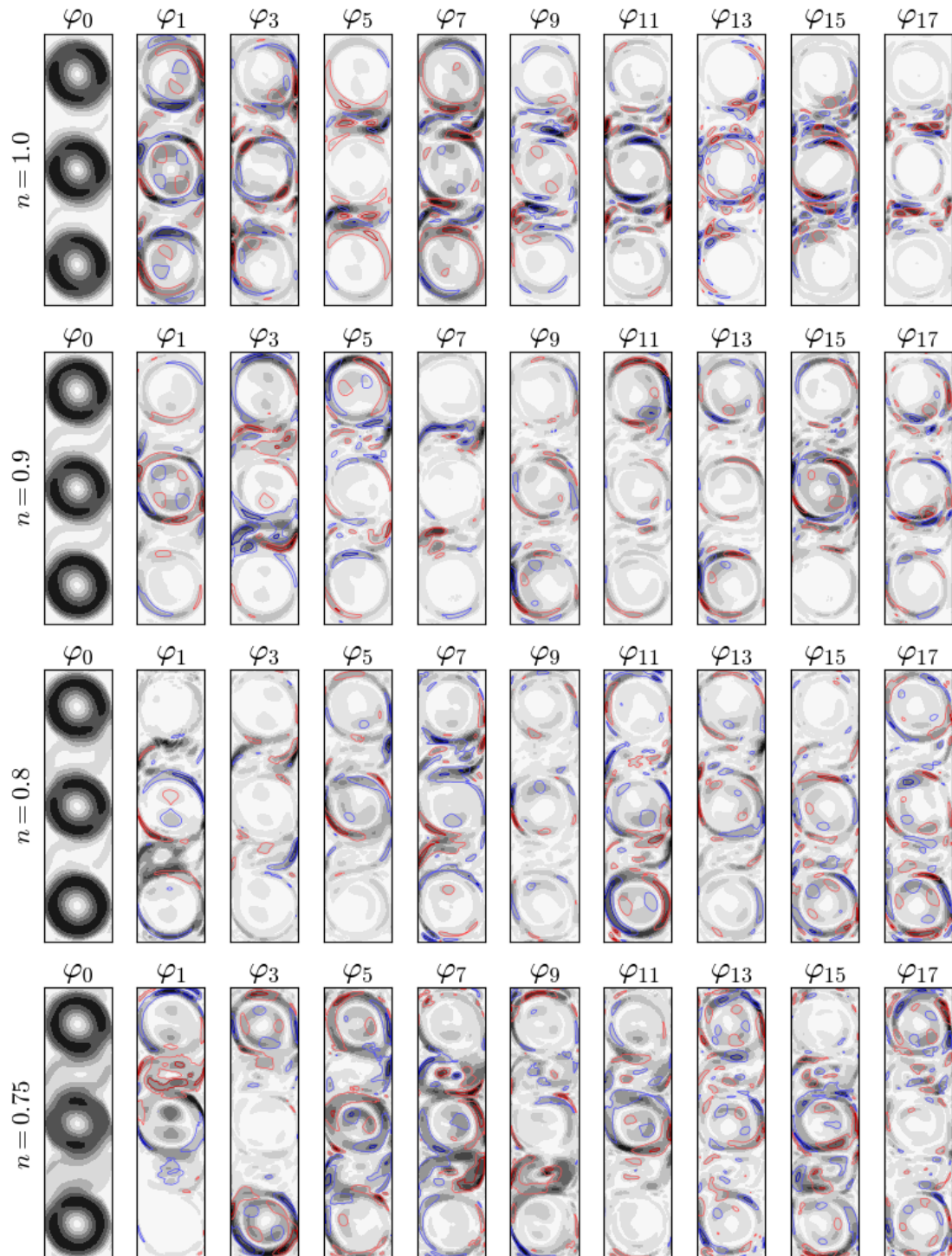
Odvisnost lastnih vektorjev od Ra pri fiksnem $n = 0.9$ je prikazana na sliki 4.6. Dinamika pri najmanjšem Ra je relativno stabilna, saj so prisotna le blaga opletanja glavnih vrtincev in dodatna šibka nihanja sredinskega oziroma med posameznimi vrtinci. Ob povečanju Ra postanejo nihanja med vrtinci vse močnejša, pri največjem Ra pa se pojavijo tudi dodatni načini posameznega nihanja vrtincev. Z večanjem Ra se med vrtinci pojavijo zametki novih vrtincev z obratno smerjo vrtinčenja.

Odvisnost lastnih vektorjev od n pri relativno visokem $Ra = 500\,000$ je prikazana na sliki 4.7. Sistem ima že pri $n = 1$ bogato dinamiko z opletanjem vrtincev in močnimi oscilacijami med vrtinci. Kljub bogati dinamiki so lastni vektorji še vedno simetrični ob preslikavi čez sredinsko točko.

Ob manjšanju n postaja dinamika vse bolj divja. Lastni vektorji izgubijo strukturo in niso več simetrični, ki pa ob manjšanju n izgublja strukturo in postaja vse bolj neurejena.



Slika 4.6: Vpliva n na lastne vektorje DMD za pokončno pravokotno kotanjo. Absolutna vrednost je prikazan kot črno-bela slika, kjer črna predstavlja večje vrednosti. Kompleksni del lastnega vektorja je prikazan z nivojnicami, katerih barva predstavlja vrednosti in sicer na razponu od temno modre za majhne do temno rdeče za velike vrednosti. a prikazuje lastne vektorje 10 najmočnejših načinov, kjer za oscilatorne prikažemo le enega iz kompleksno konjugiranega para

Lastni vektorji DMD za različne n pri $Ra = 500000$ 

Slika 4.7: Vpliv n na lastne vektorje DMD. Absolutna vrednost je prikazana kot črno-bela slika, kjer črna predstavlja večje vrednosti. Kompleksni del lastnega vektorja je prikazan z nivojnicami, katerih barva predstavlja vrednosti in sicer na razponu od temno modre za majhne do temno rdeče za velike vrednosti. Slika prikazuje lastne vektorje 10 najmočnejših načinov, kjer za oscilatorne prikažemo le enega iz kompleksno konjugiranega para.

Poglavje 5

Zaključek

V magistrskem delu smo si ogledali dinamično modalno dekompozicijo tokovnih struktur, ki nastanejo pri naravni konvekciji nenevtonskih tekočin v zaprti kotanji.

Povzeli smo osnovni model, ki opisuje vse pojave potrebne za opis naravne konvekcije. Dinamiko opišemo s tremi parcialnimi diferencialnimi enačbami, ki opisujejo prenos toplote in gibalne količine ter ohranitev mase. Sistem dopolnita še dve konstitutivni enačbi za opis temperaturne odvisnosti gostote in opis nenevtonske viskoznosti. Reševanja modela smo se lotili numerično, in sicer s posplošeno metodo končnih diferenc, eksplicitnim Eulerjevim korakanjem in Chorinovo projekcijsko metodo. Numerični rešitveni postopek smo implementirali v programskem jeziku *C++* s pomočjo odprto-kodne knjižnice *Medusa*, ki implementira osnovne gradnike brez-mrežne numerične analize.

Implementiran rešitveni postopek smo v prvem koraku preverili preko primerjave z rezultati objavljenimi v znanstveni literaturi, kjer smo pogledali naravno konvekcijo. Pokazali smo, da se rezultati izračunani z našim rešitvenem postopkom dobro ujemajo z referenčnimi vrednostmi. Prav tako smo pokazali, da se metoda obnaša konvergentno.

V nadaljevanju smo vpeljali dinamično modalno dekompozicijo in pokazali, da so lastni načini pridobljeni z DMD povezani s Koopmanovim operatorjem. Metodo smo uporabili na sintetičnem primeru in s tem demonstrirali, kako močno orodje predstavlja pri identifikaciji lastnih načinov dinamike.

V zadnjem delu predstavimo dinamično modalno dekompozicijo numerično izračunane dinamike naravne konvekcije nenevtonske tekočine. Z dinamično modalno dekompozicijo smo za različne nenevtonske tekočine pri različnih pogojih identificirali prehod iz stacionarnega v oscilatoren režim. Preučili smo vpliv parametrov na obliko nihajnih načinov in ugotovili, da uporaba modela pseudoplastičnih tekočin obogati dinamiko pri enaki vrednosti brezdimenzijskih parametrov.

Nadaljnje delo bo usmerjeno v stabilizacijo numeričnega izračuna adveksijskega člena. V prvem koraku bomo preizkusili privetrno aproksimacijo diferencialnih operatorjev in stabilizacijo z dodajanjem hiperviskoznosti. Obe shemi je v danem numeričnem okvirju relativno preprosto implementirati, saj nam splošnost uporabljene metode dopušča preprosto spreminjanje načina aproksimacije diferencialnih operatorjev.

Analiza lastnih načinov pridobljenih z dinamično modalno dekompozicijo se je izkazala za koristno pri določanju dinamičnih struktur. V nadaljnjem delu bomo metodo uporabili pri analizi problemov z bolj kompleksno geometrijo, kjer lahko

dodatno izkoristimo prilagodljivost uporabljenih brez mrežnih metod.

Literatura

- [1] J. Rakovec, T. Vrhovec in G. Gregorič, *Osnove meteorologije za naravoslovce in tehnike* (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 2000).
- [2] J. A. Dantzig in M. Rappaz, *Solidification* (EFPL Press, 2009).
- [3] A. Bejan, *Convection heat transfer* (John Wiley & Sons, 2013).
- [4] M. Giangi, T. A. Kowalewski, F. Stella in E. Leonardi, *Natural convection during ice formation: numerical simulation vs. experimental results*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences **7**, 321 (2000).
- [5] J. H. Ferziger, M. Perić in R. L. Street, *Computational methods for fluid dynamics*, Zv. 3 (Springer, 2002).
- [6] E. C. Bingham, *An investigation of the laws of plastic flow*, 278 (US Government Printing Office, 1917).
- [7] C. Pozrikidis, *Numerical investigation of the effect of surfactants on the stability and rheology of emulsions and foam*, Journal of Engineering Mathematics **41**, 237 (2001).
- [8] L. Yang in K. Du, *A comprehensive review on the natural, forced, and mixed convection of non-Newtonian fluids (nanofluids) inside different cavities*, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry , 1 (2019).
- [9] R. P. Chhabra, *Non-Newtonian Fluids: An Introduction*, v *Rheology of Complex Fluids*, ur. J. M. Krishnan, A. P. Deshpande in P. B. S. Kumar (Springer New York, New York, NY, 2010) str. 3–34.
- [10] S. CHARM in G. KURLAND, *Viscometry of Human Blood for Shear Rates of 0-100,000 sec-1*, Nature **206**, 617 (1965).
- [11] X. Wang in X. Li, *Numerical simulation of three dimensional non-Newtonian free surface flows in injection molding using ALE finite element method*, Finite Elements in Analysis and Design **46**, 551 (2010).
- [12] A. Gratão, V. Silveira in J. Telis-Romero, *Laminar flow of soursop juice through concentric annuli: Friction factors and rheology*, Journal of Food Engineering **78**, 1343 (2007).
- [13] H. A. Barnes, K. W. H. A. B. John Fletcher Hutton, J. F. Hutton in K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Rheology Series (Elsevier Science, 1989).

- [14] S. Cant, *High-performance computing in computational fluid dynamics: progress and challenges*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **360**, 1211 (2002).
- [15] G. de Vahl Davis, *Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **3**, 249 (1983).
- [16] C. Wan, B. S. V. Patnaik in D. GW Wei, *A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution*, Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals **40**, 199 (2001).
- [17] J. Ni in C. Beckermann, *Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media*, Journal of Heat Transfer **113**, 1033 (1991).
- [18] I. Demirdžić, v. Lilek in M. Perić, *Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: bench-mark solutions*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **15**, 329 (1992).
- [19] S. M. Elsherbiny, M. A. Teamah in A. R. Moussa, *Natural convection heat transfer from an isothermal horizontal square cylinder*, Alexandria Engineering Journal **56**, 181 (2017).
- [20] O. Zeitoun, *Numerical modeling of natural convection heat transfer from a horizontal torus*, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications **65**, 911 (2014).
- [21] M. M. Molla, S. C. Paul in M. A. Hossain, *Natural convection flow from a horizontal circular cylinder with uniform heat flux in presence of heat generation*, Applied Mathematical Modelling **33**, 3226 (2009).
- [22] R. P. Bharti, R. P. Chhabra in V. Eswaran, *A numerical study of the steady forced convection heat transfer from an unconfined circular cylinder*, Heat and Mass Transfer **43**, 639 (2006).
- [23] H. Ozoe in S. W. Churchill, *Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-de Waele and Ellis fluids: The development of a numerical solution*, AIChE Journal **18**, 1196 (1972).
- [24] G. B. Kim, J. M. Hyun in H. S. Kwak, *Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure*, International Journal of Heat and Mass Transfer **46**, 3605 (2003).
- [25] O. Turan, A. Sachdeva, N. Chakraborty in R. J. Poole, *Laminar natural convection of power-law fluids in a square enclosure with differentially heated side walls subjected to constant temperatures*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **166**, 1049 (2011).
- [26] N. O. Moraga in R. A. Lemus-Mondaca, *Numerical conjugate air mixed convection/non-Newtonian liquid solidification for various cavity configurations and rheological models*, International Journal of Heat and Mass Transfer **54**, 5116 (2011).

-
- [27] D. S. Loenko, A. Shenoy in M. A. Sheremet, *Natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a square cavity with a heat-generating element*, *Energies* **12**, 2149 (2019).
- [28] A. Raisi, *Natural Convection of Non-Newtonian Fluids in a Square Cavity with a Localized Heat Source.*, *Strojniški Vestnik/Journal of Mechanical Engineering* **62**, 10.5545/sv-jme.2015.3218 (2016).
- [29] S. G. Chen, Q. C. Sun, F. Jin in J. G. Liu, *Simulations of Bingham plastic flows with the multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model*, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* **57**, 532 (2014).
- [30] N. O. Moraga, M. A. Marambio in R. C. Cabrales, *Geometric multigrid technique for solving heat convection-diffusion and phase change problems*, *International Communications in Heat and Mass Transfer* **88**, 108 (2017).
- [31] P. Schlatter, S. Bagheri in D. S. Henningson, *Self-sustained global oscillations in a jet in crossflow*, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **25**, 129 (2010).
- [32] P. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz in C. W. Rowley, *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry* (Cambridge university press, 2012).
- [33] C. W. Rowley, *Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**, 997 (2005).
- [34] P. J. Schmid, *Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data*, *Journal of Fluid Mechanics* **656**, 5–28 (2010).
- [35] G. Kosec in B. Šarler, *Solution of a low Prandtl number natural convection benchmark by a local meshless method*, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* **23**, 22 (2013).
- [36] R. Peçanha, *Fluid Particles: A Review*, *Journal of Chemical Engineering & Process Technology* **06** (2015).
- [37] R. Podgornik, *Mehanika kontinuov* (2002), <http://www-f1.ijs.si/~rudi/lectures/mk-1.9.pdf> [09-04-2020].
- [38] F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill international edition (McGraw-Hill, 2006).
- [39] J. D. Anderson Jr, *Fundamentals of aerodynamics* (Tata McGraw-Hill Education, 2010).
- [40] F. Irgens, *Continuum mechanics* (Springer Science & Business Media, 2008).
- [41] L. Landau in E. Lifshitz, *Fluid Mechanics: Volume 6*, let. 6 (Elsevier Science, 2013).
- [42] D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, Oxford Science Publ (Clarendon Press, 1988).

- [43] J. Slak in G. Kosec, *Refined meshless local strong form solution of Cauchy–Navier equation on an irregular domain*, Engineering Analysis with Boundary Elements **100**, 3 (2019).
- [44] A. J. Chorin, *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Mathematics of computation **22**, 745 (1968).
- [45] B. N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, Zv. 116 (Siam, 2010).
- [46] J. Slak in G. Kosec, *Medusa: A C++ Library for solving PDEs using Strong Form Mesh-Free methods*, arXiv preprint arXiv:1912.13282 (2019), <http://e6.ijs.si/medusa/>.
- [47] K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon, O. T. Schmidt, S. Gordeyev, V. Theofilis in L. S. Ukeiley, *Modal Analysis of Fluid Flows: An Overview*, AIAA Journal **55**, 4013 (2017).
- [48] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter in D. S. Henningson, *Spectral analysis of nonlinear flows*, Journal of Fluid Mechanics **641**, 115–127 (2009).
- [49] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton in J. N. Kutz, *On dynamic mode decomposition: Theory and applications*, Journal of Computational Dynamics **1**, 391 (2014).
- [50] H. Arbabi in I. Mezić, *Ergodic Theory, Dynamic Mode Decomposition, and Computation of Spectral Properties of the Koopman Operator*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems **16**, 2096 (2017).
- [51] K. Taira, M. S. Hemati, S. L. Brunton, Y. Sun, K. Duraisamy, S. Bagheri, S. T. M. Dawson in C.-A. Yeh, *Modal Analysis of Fluid Flows: Applications and Outlook*, AIAA Journal **58**, 998 (2020).
- [52] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton in J. L. Proctor, *Dynamic Mode Decomposition: Data-Driven Modeling of Complex Systems*, Other Titles in Applied Mathematics (Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016).
- [53] J. Grosek in J. N. Kutz, *Dynamic Mode Decomposition for Real-Time Background/Foreground Separation in Video*, arXiv e-prints , arXiv:1404.7592 (2014).
- [54] J. Proctor in P. Welkhoff, *Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition*, International health **7**, 139 (2015).

Dodatek A

Povezava lastnih vrednosti/vektorjev Koopmanovega operatorja in DMD

Obravnavajmo diskreten dinamični sistem

$$z \mapsto f(z), \quad (\text{A.1})$$

kjer je z element mnogoterosti M . Dinamiko skalarne opazljivke $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ zapišemo s Koopmanovim operatorjem

$$\mathcal{K}g(z) = g(f(z)), \quad (\text{A.2})$$

ki pravzaprav predstavlja kompozicijo f in g . Koopmanov operator si predstavljamo kot prevod dinamike v prostor izbrane opazljivke, s katerim pridobimo linearnost samega operatorja, a jo nadomestimo z neskončno dimenzionalnostjo. Izkoristimo linearnost operatorja in zapišemo razvoj po lastnih vrednostih

$$\mathcal{K}\phi(z) = \lambda\phi(z), \quad (\text{A.3})$$

kjer λ predstavlja lastno vrednost in ϕ lastno funkcijo Koopmanovega operatorja.

Za povezavo s formulacijo DMD uvedemo vektor $h : M \rightarrow \mathbb{C}^n$, sestavljen iz opazljivk $h_j : M \rightarrow \mathbb{C}$, in zapišemo par zaporednjih stanj dinamičnega sistema (A.1)

$$\mathbf{x}_k = h(\mathbf{z}_k) \quad \mathbf{y}_k = h(f(\mathbf{z}_k)). \quad (\text{A.4})$$

Stolpce parov stanj zložimo v matriki \mathbf{X} in \mathbf{Y} ter zapišemo linearni sistem $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Z algoritmom za DMD izračunamo lastne vrednosti in vektorje linearne preslikave $\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^+$, sledeč teorem povzet po [49] pa utemelji njihovo povezavo s \mathcal{K} .

Teorem 1. *Naj bo ϕ lastna funkcija \mathcal{K} z lastno vrednostjo λ . Privzamemo, da je $\phi \in \text{span}\{h_j\}$ in velja*

$$\phi = \varphi^\dagger h$$

za nek $\varphi \in \mathbb{C}^n$. Če je $\varphi \in \text{Im}(\mathbf{X})$, potem je φ levi lastni vektor \mathbf{A} z lastno vrednostjo λ .

Teorem dokažemo s preoblikovanjem $\mathcal{K}\phi(z) = \lambda\phi(z)$ v

$$\varphi^\dagger h(z) = \lambda\varphi^\dagger h(f(z)) \quad \forall z \in M, \quad (\text{A.5})$$

Dodatek A. Povezava lastnih vrednosti/vektorjev Koopmanovega operatorja in DMD

kar lahko zapišemo točno s pari opazljivk, ki smo jih uporabili pri formulaciji DMD

$$\varphi^\dagger \mathbf{Y} = \lambda \varphi^\dagger \mathbf{X}. \quad (\text{A.6})$$

Enačbo z desne pomnožimo s psevdoinverzom \mathbf{X}^+ in upoštevamo, da je $\mathbf{X}\mathbf{X}^+ = \mathbb{P}_X$ projekcija na $\text{Im}(\mathbf{X})$

$$\varphi^\dagger \mathbf{Y} \mathbf{X} = \lambda \varphi^\dagger \mathbb{P}_X. \quad (\text{A.7})$$

Predpostavili smo, da φ^\dagger leži v sliki \mathbf{X} in posledično $\varphi^\dagger \mathbb{P}_X = \varphi^\dagger$, kar zaključí dokaz

$$\varphi^\dagger \mathbf{A} = \lambda \varphi^\dagger. \quad (\text{A.8})$$

Lastne vrednosti in vektorji DMD se torej ujemajo s Koopmanovimi dokler imamo primerne opazljivke ($\phi \in \text{span}\{h_j\}$) in dovolj bogate podatke ($\varphi \in \text{Im}(\mathbf{X})$).

Dodatek B

Ujemanje lastnih vrednosti in vektorjev linearne preslikave \mathbf{A} z rezultati DMD dekompozicije

V DMD algoritmu izračunamo lastne vrednosti in vektorje iz matrike $\tilde{\mathbf{A}}$, ki predstavlja projekcijo linearne preslikave \mathbf{A} na lastne vektorje ortogonalne dekompozicije. Želimo se prepričati, da izračunana dekompozicija ustreza tudi linearni preslikavi. Dokaz je povzet po [49].

Iz SVD razcepa enačbe predhodnih vrednosti (3.4) lahko zaradi lastnosti samih SVD matrik tvorimo psevdoinverz

$$(\mathbf{V}_0^{N-1})^+ = \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^\dagger \quad (\text{B.1})$$

in ga uporabimo za preoblikovanje enačbe (3.3)

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_1^N (\mathbf{V}_0^{N-1})^+ = \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{B}\mathbf{U}^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

kjer smo uvedli $\mathbf{B} = \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}$.

Z \mathbf{B} zapišemo še $\tilde{\mathbf{A}}$ in izraz, ki smo ga uporabili za pretvorbo lastnih vektorjev $\tilde{\mathbf{A}}$ v lastne vektorje originalne linearne preslikave \mathbf{A}

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{B}, \quad (\text{B.3})$$

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \mathbf{V}_1^N \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1} w = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}w, \quad (\text{B.4})$$

kjer so λ označene lastne vrednosti in w lastni vektorji matrike $\tilde{\mathbf{A}}$. Velja torej $\tilde{\mathbf{A}}w = \lambda w$ in ob predpostavki $\lambda \neq 0$ zapišemo podobno še za matriko \mathbf{A}

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}\mathbf{U}^\dagger \mathbf{B}w = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}w = \mathbf{B}w = \lambda\varphi. \quad (\text{B.5})$$

φ je torej lastni vektor \mathbf{A} z lastno vrednostjo λ . Pokažemo lahko, da $\varphi \neq 0$, saj bi v nasprotnem primeru izraz $\mathbf{B}w = 0$ predstavljal lastni vektor $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{B}w = \tilde{\mathbf{A}}w = 0$ z $\lambda = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko.

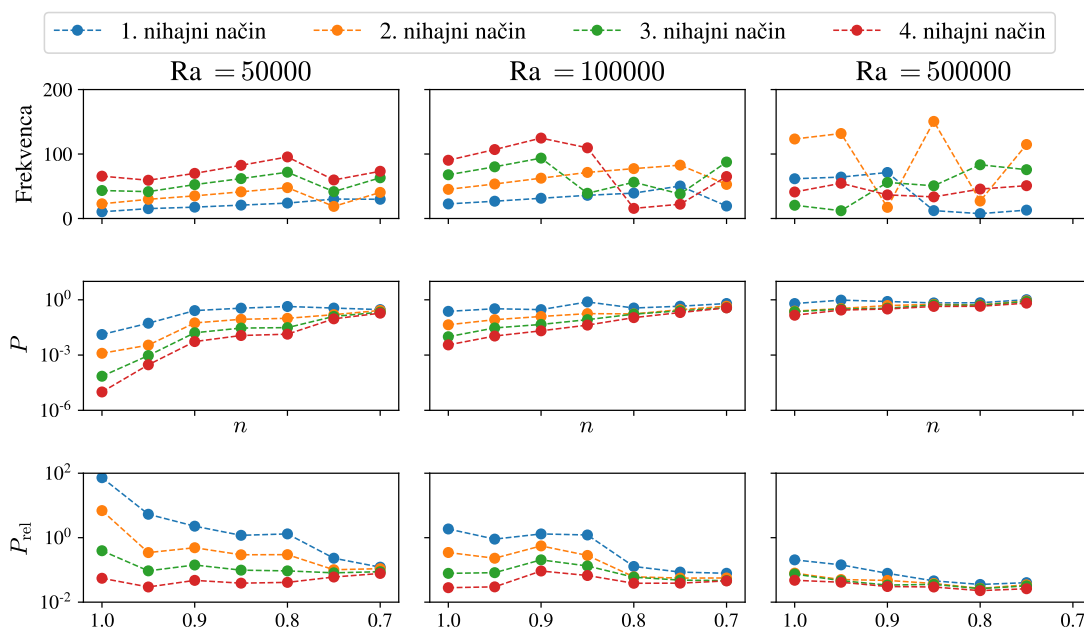
V nasprotni smeri lahko pokažemo da z algoritmom najdemo vse lastne vrednosti \mathbf{A} . Predpostavimo $\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi$ za $\lambda \neq 0$ in uporabimo $w = \mathbf{U}^\dagger \varphi$

$$\tilde{\mathbf{A}}w = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{B}\mathbf{U}^\dagger \varphi = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{A}\varphi = \lambda \mathbf{U}^\dagger \varphi = \lambda w. \quad (\text{B.6})$$

w je torej lastni vektor $\tilde{\mathbf{A}}$ z lastno vrednostjo λ . Podobno kot prej pokažemo, da $w \neq 0$, saj bi v nasprotnem primeru izraz $\mathbf{U}^\dagger \varphi = 0$ predstavljal lastni vektor $\mathbf{B}\mathbf{U}^\dagger \varphi = \mathbf{A}\varphi = 0$ z $\lambda = 0$, kar pa je v nasprotju s predpostavko.

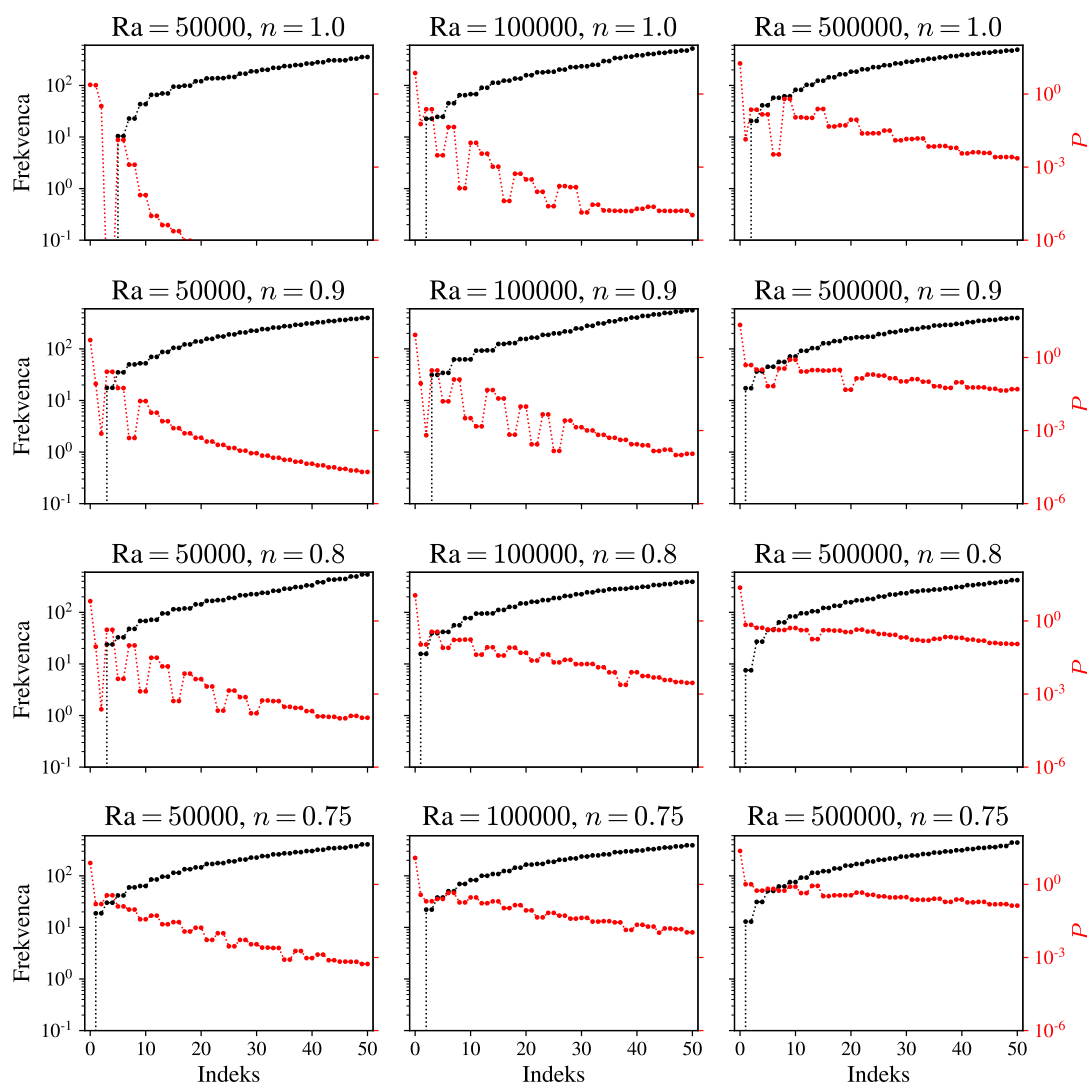
Poglavje 6

Frekvence in moči lastnih načinov za primer pokončne pravokotne kotanje



Slika 6.1: Spreminjanje frekvence, moči in pomembnosti najmočnejših nihajnih načinov pokončne pravokotne kotanje v odvisnosti od eksponenta n , ki določa moč newtonskega obnašanja. Zgornji vrstici prikazujeta odvisnost frekvence in moči, spodnja pa odvisnost deleža skupne moči nihajnih načinov, ki ga zajame obravnavani nihajni način, v odvisnosti od newtonskosti.

Poglavje 6. Frekvence in moči lastnih načinov za primer pokončne pravokotne kotanje



Slika 6.2: DMD spekter za pokončno pravokotno kotanje prikazuje frekvence lastnih načinov in pripadajoče moči. Posamezni grafi prikazujejo rezultate dekompozicije za vse obravnavane kombinacije parametrov. Frekvence so prikazane s črno barvo in so naraščajoče urejene. Vrednosti frekvenc v posamezni vrstici so označene na levi črni skali. Pripadajoče moči so prikazane z rdečo barvo in urejene tako, da sovpadajo s frekvencami načina. Vrednosti moči v posamezni vrstici so označene na desni rdeči skali. Pri interpretaciji je potrebno upoštevati, da je skala moči v prvi vrstici drugačna kot v ostalih